MATS263 Todennäköisyysteoria 3
Harjoitus 2

Tiistai 24.9.2013

MaD 381, klo 16.00

1. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Onko totta:
   (a) Jos $X_n \to X$ melkein varmasti, niin $f(X_n) \to f(X)$ melkein varmasti.
   (b) Jos $X_n \to X$ stokastisesti, niin $f(X_n) \to f(X)$ stokastisesti.
   (c) Jos $X_n \to X$ L_p-normin suhteen (jollakin $p \geq 1$), niin $f(X_n) \to f(X)$ L_p-normin suhteen.

2. Olkoon X satunnaismuuttuja ja F_X sen kertymäfunktio. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka on jatkuva kertymäfunktion F_X jatkuvuuspisteissä. Jos $X_n \to X$ jakaumamielessä, suppeneeko $f(X_n) \to f(X)$ jakaumamielessä?

3. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Onko totta:
   (a) Jos $X_n \to X$ ja $Y_n \to Y$ melkein varmasti, niin $aX_n + bY_n \to aX + bY$ melkein varmasti.
   (b) Jos $X_n \to X$ ja $Y_n \to Y$ stokastisesti, niin $aX_n + bY_n \to aX + bY$ stokastisesti.
   (c) Jos $X_n \to X$ ja $Y_n \to Y$ L_p-normin suhteen (jollakin $p \geq 1$), niin $aX_n + bY_n \to aX + bY$ L_p-normin suhteen.

4. Osoita, että $X_n \to X$ stokastisesti, jos ja vain, jos

$$\mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right] \to 0$$

5. Olkoon $\lambda > 0$ ja $X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$. Osoita, että X_n suppenee Poisson-jakaumaan parametrilla λ, eli kohti satunnaismuuttujaa X, jolle $p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

6. Olkoot $x_1, X_2, \ldots$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on sama tiheysfunktio

$$f(y) := \begin{cases} \alpha x^{-\alpha-1}, \text{ kun } x > 1, \\ 0 \text{ muutoin,} \end{cases}$$

   missä $\alpha > 0$. Merkitään $Y_n := n^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \max_{1 \leq k \leq n} X_k$. Suppeneeko Y_n jakaumamielessä? Mihin?