

# MATS263 Todennäköisyysteoria 3

## Harjoitus 1

Tiistai 17.9.2013

MaD 381, klo 16.15

1. Anna esimerkki satunnaismuuttujien jonosta, joka
  - (a) suppenee melkein varmasti, mutta joiden odotusarvot eivät supene melkein varman rajan odotusarvoon,
  - (b) suppenee melkein varmasti, ja odotusarvot suppenevat melkein varman rajan odotusarvoon, mutta jono ei supene  $L_1$ -normin suhteen.
2. Anna esimerkki satunnaismuuttujien jonosta, joka
  - (a) suppenee  $L_1$ -normin suhteen, mutta ei melkein varmasti,
  - (b) suppenee stokastisesti, mutta ei melkein varmasti. Etsi esimerkiksi osajono, joka suppenee melkein varmasti.
3. Anna esimerkki satunnaismuuttujien jonosta, joka
  - (a) suppenee stokastisesti, mutta ei  $L_1$ -normin suhteen,
  - (b) suppenee  $L_1$ -normin suhteen, mutta ei  $L_2$ -normin suhteen.
4. Osoita raja-arvon yksikäsitteisyys (melkein varmasti) satunnaismuuttujajonon supetessa
  - (a) melkein varmasti,
  - (b) stokastisesti,
  - (c)  $L_p$ -normin suhteen,  $p \geq 1$ .
5. Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  todennäköisyysavaruus ja  $X, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satunnaismuuttujia,  $n = 1, 2, \dots$ . Osoita, että  $X_n \rightarrow X$  melkein varmasti, jos ja vain, jos kaikilla  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \omega \in \Omega : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \right) \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

6. Totea, että  $X_n \rightarrow X$  melkein varmasti, kun oletetaan, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} (|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \text{ kaikilla } \varepsilon > 0.$$

Osoita esimerkillä, että ehto on aidosti vahvempi kuin melkein varma suppeneminen.