

## Rahoitusteorian jatkokurssi

### Harjoitus 3

Maanantai 8.4.2013

MaA 203, klo 12.15

1. Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  todennäköisyysavaruus ja  $\mathbb{Q}$  todennäköisyysmitta siten, että  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ . Olkoon  $X, X_1, X_2, \dots$  satunnaismuuttujia. Osoita, että

$$X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} X, \text{ jos ja vain, jos } X_n \xrightarrow[\mathbb{Q}]{n \rightarrow \infty} X,$$

missä  $X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} X$  tarkoittaa stokastista suppenemista mitan  $\mathbb{P}$  suhteen:  $\mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  kaikilla  $\varepsilon > 0$ .

2. Anna esimerkki jatkuva-aikaisesta (epät triviaalista) martingaalista, joka ei ole neliöintegroituva.



Tehtävissä 3 ja 4 tarkastellaan klassista Black-Scholes -mallia

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, (S_t^0)_{t \in [0, T]}, (S_t)_{t \in [0, T]}),$$

missä  $T > 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $\sigma > 0$  ja  $\mu \in \mathbb{R}$  sekä

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \text{ ja } dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

3. Laske eurooppalaisen myyntioption  $h = (K - S_T)^+$  tasapuolinen hinta hetkellä  $t = t_0 \in [0, T]$ .
4. Laske binäärioption  $h = \chi_{\{S_T \geq K\}}$  tasapuolinen hinta hetkellä  $t = t_0 \in [0, T]$ .



5. Tutkitaan Black-Scholes -mallia parametreilla  $T = 10$ ,  $r = 0,05$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0,1$  ja  $S_0 = 100$ . Simuloi ja piirrä osakkeen hintakehitys (yksi polku). Piirrä samaan kuvaan eurooppalaisen osto-option (lunastushinta  $K = 110$ ) hintakehitys, missä hetkellä  $t$  oletetaan tunnetuksi simuloimasi hintakehitys hetkeen  $t$  saakka.

Vaihda yhtä parametria kerrallaan ja piirrä lisää kuvia.

Valitse jokin ajanhetki  $t$  kiinteäksi ja kokeile eri parametrien vaikutusta hintaan.