

Rahoitusteorian jatkokurssi

Harjoitus 2

Tiistai 2.4.2013

MaD 302, klo 16.10

- (a) Selvitä, mikä on “osto-myynti -pariteetti” (put-call parity).
(b) Osoita, että strategia $\phi = (H_t^0, H_t)_{t \in [0, T]}$ on omavarainen joss

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$$

kaikilla $t \in [0, T]$ (Lause 2.4).

- Olkoon $T > 0$, $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ standardi Brownin liike ja $0 < \tilde{T} \leq T$. Osoita, että $X = (X_t)_{t \in [0, \tilde{T}]}$ on Brownin liike, kun

- $X_t := B_T - B_{T-t}$ ja $\tilde{T} = T$
- $X_t := \sqrt{a}B_{\frac{t}{a}}$ ja $\tilde{T} = aT$ jollakin $a > 0$.

- Olkoon $W = (W_t)_{t \geq 0}$ standardi Brownin liike. Onko

$$\left(\int_0^t \operatorname{sgn}(W_s) dW_s \right)_{t \geq 0}$$

myös Brownin liike, kun $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} \chi_{\{x \neq 0\}}$?

- Olkoon $W = (W_t)_{t \geq 0}$ standardi Brownin liike. Osoita, että

$$\limsup_{s \rightarrow t+} \frac{W_t - W_s}{t - s} = \infty$$

melkein varmasti kaikilla $t \geq 0$. Miksi riittää tutkia $t = 0$?

- Olkoon $\sigma \in \mathbb{R}$. Osoita, että geometrinen Brownin liike S , missä

$$S_t = e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t},$$

on martingaali. Osoita lisäksi, että $\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} S_t^2 < \infty$.

- Olkoon $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ standardi Brownin liike ja $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$. Ratkaise

- $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$,
- $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t$ ja
- $dX_t = \mu dt + \sigma X_t dW_t$.

7. Millaisia ratkaisuja löydät yhtälölle

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt,$$

kun

(a) $\sigma \equiv 0$ ja $b(t, x) = x^2$ ja $X_0 = 1$,

(b) $\sigma \equiv 0$ ja $b(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ ja $X_0 = 0$?

Miksi havaintosi eivät ole ristiriidassa Lauseen 1.1 kanssa?

8. Osoita, että jos X on Itô'n diffuusio, niin $\mathbb{E} \int_0^T X_s^2 ds < \infty$.

9. Olkoon W_t standardi Brownin liike. Simuloi aikavälillä $[0, 1]$ geometrisen Brownin liikkeen $S_t = e^{\frac{\mu - \sigma^2}{2}t + \sigma W_t}$ polkuja parametreilla $\mu_1 = 0$, $\sigma_1 = 2$ ja $\mu_2 = 1$, $\sigma_2 = 5$. Aikaverkon tiheyden voit päättää itse. Piirrä kuva, jossa on mukana käyrä $(t, \mathbb{E}S_t)$. Mitä se kertoo?