Rahoitusteorian jatkokurssi
Harjoitus 1

Maanantai 18.3.2013

MaA 203, klo 12.15

Ensimmäiset seitsemän tehtävää ovat esitietojen kertausta kurssilta Rahoitusteorian stokastisia malleja 1.

1. Käsitellään yhden aika-askeleen yhden osakkeen kahden tilan mallia, joka sisältää korollisen, riskittömän sijoituskohteen: $S_0^0 = 1$, $S_T^0 = 1+r$, $r > 0$. Laske eurooppalaisen osto-option $f(S_T^1) = (S_T^1 - K)^+$ tasapuolinen hinta C_0 korollisessa mallissa (seuraavien askelten avulla):

   (a) Oletetaan, että S_T on joko $S_{T,u} = 20$ tai $S_{T,d} = 7,5$ ja $K = 15$. Laske suojausstrategia eli pari (ϕ_0, ϕ_1), jolle
   $$\phi_0 S_T^0 + \phi_1 S_T = (S_T - K)^+.$$

   (b) Oletetaan lisäksi, että osakkeen hinta alussa on $S_0 = 10$. Laske eurooppalaisen osto-option tasapuolinen hinta C_0.

   Vinkki: hinta on suojaussalkun alkupääoma $C_0 = \phi_0 S_0^0 + \phi_1 S_0$.

   (c) Edellisten sijaan oletetaan vain, että $r > 0$ ja $S_{T,d} < S_0 \leq K < S_{T,u}$. Kirjoita C_0 suureiden S_0, $S_{T,d}$, $S_{T,u}$, K ja r avulla.

2. (a) Jatketaan edellisen tehtävän kohdasta (a), ja merk. $p = \mathbb{P}\,(S_T = 20)$. Etsi sellainen $p = p_0$, jolle $\mathbb{E}_p \tilde{S}_T = S_0$, missä $\tilde{S}_T = \frac{S_T}{S_T^0}$ on osakkeen diskontattu hinta. Eli etsi ekvivalentti martingaalimitta.

   (b) Laske $\mathbb{E}_{p_0} \frac{(S_T - K)^+}{S_T^0}$.

3. Tarkastellaan yhden osakkeen yhden aika-askeleen useamman (=kolmen) tilan mallia. Olkoot $0 < p_1, p_2 < 1$ siten, että $p_1 + p_2 < 1$, ja korko $r = 0$. Olkoon lisäksi $S_0 = 12$ ja
   $$S_T = \begin{cases} 20 \text{ todennäköisyydellä } p_1, \\ 15 \text{ todennäköisyydellä } p_2 \text{ ja} \\ 10 \text{ todennäköisyydellä } 1 - p_1 - p_2. \end{cases}$$

   (a) Laske suojausstrategia ja tasapuolinen hinta eurooppalaiselle osto-optiolle $f(S_T) = (S_T - K)^+$, kun $K = 10$.

   (b) Millä arvoilla p_1 ja p_2 hintaprosessi (S_0, S_T) on martingaali, eli on voimassa yhtälö $\mathbb{E}S_T = S_0$? Tehtävänä on siis laskea EMM, jos mahdollista.

   (c) Käyttäen todennäköisyysmittana edellisessä kohdassa laskettua ekvivalenttia martingaalimittaa laske $\mathbb{E}(S_T - K)^+$, kun $K = 10$. Mitä huomaat?

4. Yritetään toistaa tehtävät 3 (a) ja (c), mutta nyt $K = 14$. Mitä huomaat? Vinkki: Jos päädyt vaikeuksiin, olet oikeilla jäljillä.

5. Tarkastellaan korotonta CRR-mallia. Oletetaan, että $S_0 = 1$ ja

$$S_{t+1} = \begin{cases} (1+a)S_t \text{ todennäköisyydellä } 1-p \text{ ja} \\ (1+b)S_t \text{ todennäköisyydellä } p \end{cases}$$

kaikilla $t = 1, 2, \ldots, T$, missä $0 < p < 1$ ja $-1 < a < b$. Etsi sellainen $p = p_0$, jolla $\mathbb{E}S_1 = 1$. Löytyykö aina?
Osoita lisäksi, että kun $p = p_0$, jono $(S_t)_{t=0}^T$ on martingaali historian $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ suhteen, missä $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, \ldots, S_t)$. Voit käyttää sopivia lauseita aiemmilta kursseilta tai kirjallisuudesta.

6. Tarkastellaan korollista CRR-mallia (korko $r > 0$), jossa EMM $\mathbb{Q}$ on määritelty kaavan

$$\mathbb{Q}\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1 + b\right) = p$$

avulla, ja binäärioptiota $H = c\chi_{[K,\infty[}(S_T)$, missä $c > 0$ ja $K > 0$. (Option haltija saa siis summan c, jos hetkellä T osakkeen arvo S_T on vähintään K.)

Käyttäen kaavaa $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \frac{H}{S_T^0}$ totea, että tämän option tasapuolinen hinta V_0 on

$$V_0 = \frac{c}{(1+r)^T} \sum_{k=B}^{T} \binom{T}{k} p^k (1-p)^{T-k},$$

missä $B = \inf\{u \in \mathbb{N} : S_0(1+b)^u(1+a)^{T-u} \geq K\}$.

Vinkki: Piirrä tilanteesta kuva (puumalli) ja sinne B, jos se auttaa hahmottamaan tilannetta.

7. Kuten edellinen tehtävä, mutta osto-optiolle $H = (S_T - K)^+$. Millainen kaava option hinnalle nyt saadaan?

---

8. Olkoon W_t standardi Brownin liike. Simuloi aikavälillä $[0, 1]$ Brownin liikkeen $B_t = \mu t + \sigma W_t$ polkuja parametreilla $\mu_1 = 0$, $\sigma_1 = 2$ ja $\mu_2 = 1$, $\sigma_2 = 5$. Aikaverkon tiheyden voit päättää itse. Piirrä kuva.

Simuloituasi 10 polkua laske otostodennäköisyys tapahtumalle $B_1 > 0$ eri parametreilla. Vastaako tulos odotuksiasi? Entä useammalla simulaatiolla?