

Rahoitusteorian stokastisia malleja

Harjoitus 6

Tiistai 23.10.2010

MaD 381, klo 16.10

1. Tarkastellaan CRR-mallia. Oletetaan, että $S_0 = 1$, korko $r = 0,1$ ja

$$S_{t+1} = \begin{cases} 2S_t & \text{todennäköisyydellä } \frac{1}{3} \text{ ja} \\ \frac{1}{2}S_t & \text{todennäköisyydellä } \frac{2}{3} \end{cases}$$

(eli $S_t = S_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_t$, missä $\varepsilon_k = 2$ tai $\varepsilon_k = \frac{1}{2}$ em. todennäköisyyksin ja funktiot ε_k ovat riippumattomia). Laske EMM.

Vinkki: etsi q s.e. $\mathbb{Q}(\varepsilon_k = 2) = q$ ja $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\varepsilon_k}{1+r}\right) = 1$. Tarkista EMM:n ehdot, lause 8.6 auttaa.

2. Käyttäen edellisen tehtävän tietoja piirrä "puumalli" osakkeen hinnan S_t mahdollisille vaihtoehdoille ajanhetkillä $t = 0, 1, 2, 3$. Laske todennäköisyys hinnan S_3 eri arvoille käyttäen edellisessä tehtävässä laskettua todennäköisyyksimittaa.
3. Käyttäen edellisten tehtävien tietoja laske eurooppalaisen osto-option $H = (S_3 - K)^+$ tasapuolinen hinta, kun lunastushinta K on 2.
4. Kuten tehtävä 1, mutta yleisemmin: $S_0 = 1$,

$$S_{t+1} = \begin{cases} (1+b)S_t & \text{todennäköisyydellä } \frac{1}{3} \text{ ja} \\ (1+a)S_t & \text{todennäköisyydellä } \frac{2}{3}, \end{cases}$$

missä $-1 < a < b$ ja korko $r > 0$ s.e. $a < r < b$. Laske EMM.

Onko oletus $r > 0$ tarpeen? Entä $a < r < b$?

- 5.-6. Tarkastellaan CRR-mallia, jossa EMM \mathbb{Q} on määritelty kaavan

$$\mathbb{Q}\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1+b\right) = p$$

avulla, ja binäärioptiota $H = c\chi_{[K, \infty[}(S_T)$, missä $c > 0$ ja $K > 0$. (Option haltija saa siis summan c , jos hetkellä T osakkeen arvo S_T on vähintään K .)

Käyttäen luennoilla esitettyä kaavaa $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\frac{H}{S_0^r}$ näytä, että tämän option tasapuolinen hinta V_0 on

$$V_0 = \frac{c}{(1+r)^T} \sum_{k=B}^T \binom{T}{k} p^k (1-p)^{T-k},$$

missä $B = \inf\{u \in \mathbb{N} : S_0(1+b)^u(1+a)^{T-u} \geq K\}$.

Vinkki: Piirrä tilanteesta kuva (puumalli) ja sinne B , jos se auttaa hahmottamaan tilannetta.

- 7.-8 Superbonustehtävä: (ei sisälly tehtävien kokonaismäärään hyvitysprosenttia laskettaessa; tuplarasti) Kuten edellinen tehtävä, mutta osto-optimille $H = (S_T - K)^+$. Millainen kaava option hinnalle nyt saadaan?