Rahoitusteorian stokastisia malleja
Harjoitus 5

Tiistai 16.10.2012

MaD 381, klo 16.10

1. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ äärellinen todennäköisyysavaruus, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ali-σ-algebra ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funktio, joka on $\mathcal{F}$-mitallinen sekä riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{G}$. Osoita, että $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f)$.

2. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ äärellinen todennäköisyysavaruus, $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ historia ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-mitallinen funktio. Määritellään $M_t := \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_t)$, $t = 0, \ldots, T$. Osoita, että (M_t) on martingaali historian $(\mathcal{F}_t)$ suhteen.

   Vinkki: Lause 6.3 (2)

3. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ äärellinen todennäköisyysavaruus ja olkoot $f_1, \ldots, f_T$ riippumattomia $\mathcal{F}$-mitallisia funktioita. Määritellään historia $(\mathcal{F}_t)$ asettamalla $\mathcal{F}_t := \sigma(f_1, \ldots, f_t)$ kaikilla $t = 1, \ldots, T$ (ja $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). Osoita, että

   (a) jos $\mathbb{E}(f_k) = 0$ kaikilla $k = 1, \ldots, T$, niin (M_t) on martingaali, kun $M_0 := 0$ ja $M_t := \sum_{k=1}^t f_k$ kaikilla $t \geq 1$.

   (b) jos $\mathbb{E}(f_k) = 1$ kaikilla $k = 1, \ldots, T$, niin (N_t) on martingaali, kun $N_0 := 1$ ja $N_t := \prod_{k=1}^t f_k$ kaikilla $t \geq 1$.

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan yhden osakkeen yhden aika-askeleen useamman (=kolmen) tilan mallia.

4. Olkoot $0 < p_1, p_2 < 1$ siten, että $p_1 + p_2 < 1$, ja korko $r = 0$. Olkoon lisäksi $S_0 = 12$ ja

$$S_T = \begin{cases} 20 \text{ todennäköisyydellä } p_1, \\ 15 \text{ todennäköisyydellä } p_2 \text{ ja} \\ 10 \text{ todennäköisyydellä } 1 - p_1 - p_2. \end{cases}$$

   Laske suojausstrategia ja tasapuolinen hinta eurooppalaiselle osto-optiolle $f(S_T) = (S_T - K)^+$, kun $K = 10$.

5. Jatkoa edelliseen tehtävään:

   (a) Millä arvoilla p_1 ja p_2 hintaprosessi (S_0, S_T) on martingaali, eli on voimassa yhtälö $\mathbb{E}S_T = S_0$? (Tehtävänä on siis laskea EMM, jos mahdollista.)

   (b) Käyttäen todennäköisyysmittana edellisessä kohdassa laskettua ekvivalenttia martingaalimittaa laske $\mathbb{E}(S_T - K)^+$, kun $K = 10$. Mitä huomaat?

6. Yritetään toistaa tehtävät 4 ja 5(b), mutta nyt $K = 14$. Mitä huomaat?

   Vinkki: Jos päädyt vaikeuksiin, olet oikeilla jäljillä.