Rahoitusteorian stokastisia malleja
Harjoitus 3

Tiistai 2.10.2012

MaD 381, klo 16.10

1. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ äärellinen todennäköisyysavaruus ja $A \subset \Omega$. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ ja $\mathbb{P}(A) = p$ jollakin $0 < p < 1$. Osoita, että jos $0 < a < b$, niin
$$a < \mathbb{E}\left(a\chi_A + b\chi_{A^c}\right) < b.$$

2. Olkoon $\Omega = [0, 1[$ ja sillä ositus
$$A_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right[, A_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, A_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, A_1 = \left[\frac{3}{4}, 1\right[.$$
Olkoon $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{4}$ kaikilla $i = 1, \ldots, 4$. Määritellään
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &:= \{\emptyset, \Omega\}, \\ \mathcal{F}_1 &:= \sigma(A_1 \cup A_2, A_3 \cup A_4), \\ \mathcal{F}_2 &:= \sigma(A_1, A_2, A_3, A_4) \end{aligned}$$
ja $f := 20\chi_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[}$.
   (a) Laske $\mathbb{E}f$.
   (b) Laske $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_1)$.
   (c) Määritellään $M_0 := \mathbb{E}f$, $M_1 := \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_1)$ ja $M_2 := f$. Osoita, että $(M_n)_{n=0}^2$ on martingaali historian $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^2$ suhteen.

3. Jatka edellisen tehtävän martingaalia seuraava askel ($n = 3$) eli valitse ositus $B_1, \ldots, B_N$ ja todennäköisyysmitta $\mathbb{P}_1$ siten, että $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 := \sigma(B_1, \ldots, B_N)$ ja $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{F}_2$ sekä keksi $\mathcal{F}_3$-mitallinen funktio M_3, jolle $\mathbb{E}(M_3|\mathcal{F}_2) = f$.

4. Olkoon $\Omega \neq \emptyset$ ja $A_1, \ldots, A_N$ sen ositus. Määritellään $\mathcal{F} := \sigma(A_1, \ldots, A_N)$. Osoita, että $\mathcal{F}$-mitallisille funktioille f ja g
   (a) $f + g$ on $\mathcal{F}$-mitallinen ja
   (b) fg on $\mathcal{F}$-mitallinen.

5. Tarkastellaan CRR-mallia. Oletetaan, että $S_0 = 1$ ja
$$S_{t+1} = \begin{cases} (1+a)S_t \text{ todennäköisyydellä } 1-p \text{ ja} \\ (1+b)S_t \text{ todennäköisyydellä } p \end{cases}$$
kaikilla $t = 1, 2, \ldots, T$, missä $0 < p < 1$ ja $-1 < a < b$. Etsi sellainen $p = p_0$, jolla $\mathbb{E}S_1 = 1$. Löytyykö aina?

6. Osoita, että edellisen tehtävän tilanteessa, kun $p = p_0$, jono $(S_t)_{t=0}^T$ on martingaali historian $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ suhteen, missä $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, \ldots, S_t)$.