TENTTIVASTAUSPAPERI pvm ___/___ ______ **Tentaattori** ____________________
Answer sheet day/month/year Examiner

Tenttijän sukunimi (Last name)	**Etunimet** (First names)
Syntymäaika (Date of birth)	**Pääaine** (Major subject at the Univ. of Jyväskylä)

Opinto-oikeus yliopistossa:
Right to study at the University of Jyväskylä

- ☐ **varsinainen** (degree)
- ☐ **erillinen** (separate)
- ☐ **vaihto-opiskelija** (non-degree)

Tentittävän opintojakson nimi: ____________________
Name of the study unit
Oppiaine, johon tentti kuuluu: ____________________
Exam subject

Luento ☐ **Kirjatentti** ☐ Laajuus ______ p
Lecture course Reading course Credits

Matematiikan propedeuttinen kurssi, kurssitentti 27.11.2019, ratkaisut

1. a) $\frac{2^5 \cdot 2^k}{2^{k+2}} (2^{-2})^2 = 2^{(5+k)-(k+2)} \cdot 2^{-4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x} \cdot x} = \frac{x^{\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{x^{\frac{9}{6}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{3/2}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

b) $(1-3x)(x+4) = -2(x-5)$

$x + 4 - 3x^2 - 12x = -2x + 10$

$-3x^2 - 11x + 4 + 2x - 10 = 0$

$-3x^2 - 9x - 6 = 0 \quad \| : (-3)$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$

$x = -2$ tai $x = -1$

(TAI $x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{-6} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$)

c) $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$ (määr. kaikilla $x \in \mathbb{R}$)

$f(\ln 2) = e^{3\ln 2} - e^{2\ln 2} = (e^{\ln 2})^3 - (e^{\ln 2})^2 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

(potenssin laskus.)

(TAI logaritmin laskusäännöillä $3 \ln 2 = \ln(2^3)$, $2 \ln 2 = \ln(2^2)$

$f(\ln 2) = \ldots = e^{\ln 8} - e^{\ln 4} = 8 - 4 = 4$)

2. a) Merkkikaavio; lasketaan ensin nollakohdat

$x^2 - 1 = 0$ $\quad$ $x^2 + 2 = 0$ $\quad$ $x - 3 = 0$

$x^2 = 1$ $\quad$ ei ratk. $\quad$ $x = 3$

$x = \pm 1$

		-1		1		3	
$x^2 - 1$:	+		−		+		+
$x^2 + 2$:	+		+		+		+
$x - 3$:	−		−		−		+
tulo :	−		+		−		+

Siis $(x^2-1)(x^2+2)(x-3) \geq 0$, kun $-1 \leq x \leq 1$ tai $x \geq 3$.

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $g(x) = 3x$

$f(x) \geq g(x)$

$\frac{x}{1-x} \geq 3x$

$\frac{x}{1-x} - {}^{(1-x)}3x \geq 0$

$\frac{x}{1-x} - \frac{3x(1-x)}{1-x} \geq 0$

$\frac{x - 3x + 3x^2}{1-x} \geq 0$

$\frac{3x^2 - 2x}{1-x} \geq 0$

Tehdään merkkikaavio; merkki voi vaihtua osoittajan nollakohdissa ja/tai kohdissa, joissa lauseketta ei ole määritelty eli nimittäjän nollakohdissa.

(Osoittajan) Nollakohdat: $3x^2 - 2x = 0$

$x(3x-2) = 0$

$x = 0$ tai $3x - 2 = 0$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

Nimittäjän nollakohdat: $1 - x = 0$

$x = 1$

		0		$\frac{2}{3}$		1	
$3x^2-2x$:	+		−		+		+
$1-x$:	+		+		+		−
$\frac{3x^2-2x}{1-x}$:	+		−		+		−

Siis $f(x) \geq g(x)$, kun $x \leq 0$ tai $\frac{2}{3} \leq x < 1$.

3. a) $f(x) = 27x^{10} + 11x^2 - 20x + 19$

$f'(x) = 270x^9 + 22x - 20$

$f'(0) = -20$

b) $\int g(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2e^{2x}}_{= De^{2x}\text{ (ketjusääntö)}}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$

$G(0) = -1$

$\frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + C = -1$

$\frac{1}{2} + C = -1$

$C = -\frac{3}{2}$ $\qquad G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}.$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

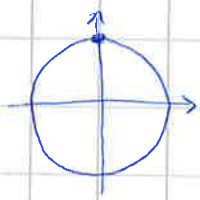
$x^2 - 2x + y^2 - 2y = -4$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -4 + 1 + 1$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = -2 < 0$, joten

yhtälö $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$ ei esitä ympyrää; (ratkaisujoukko on tyhjä).

4. a) $f(x) = \sin(2x)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$



$f'(x) = \cos(2x)\cdot 2$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 0\cdot 2 = 0$

Tangenttisuoran yhtälö on

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - 1 = 0\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = 1$ (Suora on vaakasuora, koska kulmakerroin $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.)

4. b) Lasketaan ensin leikkauspisteiden x-koordinaatit:

$3x - x^2 = 2x^3 - x^2 - 5x$

$2x^3 - 8x = 0$

$2x(x^2-4) = 0$

$2x = 0$ tai $x^2 - 4 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = \pm 2$

(*) Koska $g(-1) = -4$ ja $h(-1) = 2 > -4$, niin $h(x) \geq g(x)$ välillä $[-2, 0]$; ja koska $g(1) = 2$ ja $h(1) = -4$, niin $g(x) \geq h(x)$ välillä $[0, 2]$.

Ala muodostuu kohtien $x = -2$ ja $x = 2$ välille ja koostuu kahdesta osasta; pinta-ala on

$$A = \int_{-2}^{2} |g(x) - h(x)|\,dx \overset{(*)}{=} \int_{-2}^{0} (h(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{2} (g(x) - h(x))\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} [(2x^3 - x^2 - 5x) - (3x - x^2)]\,dx + \int_{0}^{2} [(3x - x^2) - (2x^3 - x^2 - 5x)]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\,dx + \int_{0}^{2} (-2x^3 + 8x)\,dx = \Big/_{-2}^{0} \left(\tfrac{2}{4}x^4 - 4x^2\right) + \Big/_{0}^{2} \left(-\tfrac{2}{4}x^4 + 4x^2\right)$$

$$= 0 - (-8) + (8 - 0) = 16$$

5. a) $f(x) = 2^x$, $f(0) = 2^0 = 1$, $f(1) = 2^1 = 2$, $f(2) = 2^2 = 4$

$P(x) = ax^2 + bx + c$, $P(0) = c$, $P(1) = a + b + c$, $P(2) = 4a + 2b + c$

$P(0) = f(0)$, joten $c = 1$. $P(1) = f(1)$, joten $a + b + 1 = 2$ eli $a + b = 1$.

$P(2) = f(2)$, joten $4a + 2b + 1 = 4$ eli $4a + 2b = 3$. Ratkaistaan kertoimet a ja b yhtälöparista $\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases}$. Sijoitetaan $b = 1 - a$ jälk.:

$4a + 2(1 - a) = 3$, josta saadaan $a = \frac{1}{2}$ ja edelleen $b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Siis $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$. [Tark.: $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$; ok]

b) Merk. $f(x) = (x^2 - x - 5)e^{-x}$. $f'(x) = (2x - 1)e^{-x} + (x^2 - x - 5)e^{-x}(-1) = \underbrace{e^{-x}}_{>0\ \forall x \in R}(-x^2 + 3x + 4)$.

$f'(x) = 0$, kun $-x^2 + 3x + 4 = 0$ eli kun $x = -1$ tai $x = 4$.

$f'(x) \geq 0$, kun $-1 \leq x \leq 4$, joten f on tällä välillä kasvava, ja $f'(x) \leq 0$, kun $x \geq 4$, joten f on tällä välillä vähenevä.

Niinpä funktion f suurin arvo, kun $x \geq 0$, on $f(4) = 7e^{-4}$.

Funktion f pienin arvo, kun $x \geq 0$, on $f(0) = -5$, koska kaikille $x \geq 4$ on $f(x) > 0$.