Matematiikan propedeuttinen kurssi (MATY010), syksy 2019

Harjoitus 8

Haluatko palautetta osaamisestasi jo ennen kurssitenttiä? Voit palauttaa kirjallisesti ratkaisusi 1–2 valitsemaasi lisätehtävään tai lisätehtävän osaan. Saat työsi takaisin kommentoituna, ja voit vielä korjata ratkaisuasi. Kummastakin tehtävästä voit saada 0–4 erikoispistettä, siis yhteensä korkeintaan 8, jotka vaikuttavat arvosteluun lisätehtävien tapaan. Pistemäärä riippuu sekä valitsemasi tehtävän vaativuudesta[1] että ratkaisussa näyttämästäsi osaamisesta. Palauta työsi luennolla tai harjoituksissa; 7.11. mennessä palautetuilla on mahdollisuus täysiin pisteisiin ja ne ehditään kommentoida korjauskierrosta varten. Tehtävät voit valita miltä tahansa viikolta.

---

1. Laske

   (a) $\displaystyle\int (x^4 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{3}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

2. (a) Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.
   (b) Määritä se funktion $f(x) = 4x^3 - x$ integraalifunktio F, jolle $F(1) = 2$.
   (c) Määritä funktion $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$, $x > 0$, se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(e, 2)$ kautta.

3. Onko väittämä oikein vai väärin? Perustele.

   (a) Yhdellä funktiolla voi olla kaksi, mutta ei kolmea eri integraalifunktiota.
   (b) Saman funktion kahden eri integraalifunktion kuvaajat eivät voi leikata toisiaan.
   (c) Funktiot $F(x) = \frac{1}{2x-1}$ ja $G(x) = \frac{2x}{2x-1}$ ovat saman funktion integraalifunktioita.

4. Laske

   (a) $\displaystyle\int_1^5 3x^2\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^5 + x^4 + x^3)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^3 1\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$

5. Laske

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^4 (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x$

6. Laske

   (a) $\displaystyle\int 3\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x$

[1] Kurssin kotisivulla on luettelo tehtävistä, joilla voi saada täydet pisteet.

7. Laske sen alueen pinta-ala, jonka rajaavat funktion f kuvaaja, x-akseli sekä suorat $x = a$ ja $x = b$. Hahmottele myös kuva tilanteesta (karkea mallikuva riittää).

   (a) $f(x) = 4x$, $a = 0$ ja $b = 3$, (b) $f(x) = x^2$, $a = -2$ ja $b = 2$
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$ ja $b = 4$, (d) $f(x) = 4x$, $a = -2$ ja $b = 0$
   (e) $f(x) = x^3$, $a = -2$ ja $b = 0$, (f) $f(x) = x^3$, $a = -2$ ja $b = 1$

8. Laske pyydetyn alueen pinta-ala. Hahmottele myös mallikuva tilanteesta.

   (a) Funktion $f(x) = x^2 - 4x$ kuvaajan ja x-akselin rajaama alue.
   (b) Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ kuvaajan ja x-akselin rajaama kaksiosainen alue.
   (c) Käyrän $y = \sqrt{3 - x}$, suoran $y = x + 3$ ja x-akselin rajaama alue.

9. Hahmottele karkeasti funktion $f(x) = x^3 - x$ kuvaaja (käytä tarvittaessa konetta apuna).

   (a) Arvioi kuvan perusteella, onko määrätyn integraalin arvo positiivinen, negatiivinen vai nolla:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   (b) Merkitse määrättyjen integraalien avulla, miten lasket funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin välillä $[-1, 2]$ jäävän moniosaisen alueen pinta-alan.
   (c) Laske edellisen kohdan alueen pinta-ala.

10. (a) Millä funktion $f(x) = 3x^2 + 6x$ integraalifunktiolla on paikallinen maksimiarvo 6?
    (b) Mitkä funktion $g(x) = -x^3 + x$ integraalifunktioista saavat vain negatiivisia arvoja?
    (c) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta f, jolle $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ja jonka kuvaajan ja x-akselin väliin välillä $[1, 3]$ jäävän alueen pinta-ala on 2.

Lisätehtävät

11. (a) Millä funktion $f(x) = 4x - 2$ integraalifunktiolla nollakohtien välisen janan pituus on 5?
    (b) Funktiosta f tiedetään, että $f''(x) = 48x^2 - 50$ ja että funktiolla f on paikallinen maksimi $f(0) = 36$. Onko tiedoista mahdollista selvittää funktion f lauseke? (Jos on, selvitä.)
    (c) Millä parametrin a arvolla paraabeli $y = ax^2 - a$ rajaa x-akselin kanssa alueen, jonka pinta-ala on 2?

12. Suoran tien viereen rakennetaan täyttömaasta meluvalli, jonka poikileikkaus on pystyssä olevan paraabelin muotoinen. Vallin korkeus on 3 m, leveys maanpinnan tasolla 6 m ja pituus 55 m. Kuinka monta kuutiometriä täyttömaata valliin tarvitaan? (Kevään 1993 yo-kokeen pitkän mat. tehtävä 6b)