

Harjoitus 7

Tehtävät 1–3 liittyvät edellisen viikon aiheisiin.

1. Derivoi. (Voit käyttää tietoja $Da^x = a^x \ln a$ ja $D \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$.)

(a) $5x^4 + x - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}$ (b) $\sqrt[3]{5x^2 - 3x + 1}$ (c) $3^{x^2 - x + 9}$ (d) $\log_3(x^2 - x + 9)$

2. Derivoi.

(a) $(2x + 1)e^{3x-4}$ (b) $\frac{2x + 1}{2^x}$ (c) $\ln(2x - 1)$ (d) $\frac{1}{\ln 2x}$

3. Määritä funktiolle $f(x) = \sin x$ kohtaan $x = t$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö, kun

(a) $t = 0$ (b) $t = \frac{\pi}{2}$ (c) $t = \pi$ (d) $t = \frac{5\pi}{4}$.

Hahmottele lisäksi samaan kuvaan funktion f kuvaaja (tarvittaessa käytä konetta apuna) ja pyydyt tangenttisuorat.

4. Piirrä funktioiden $f(x) = -2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 7x + 6$ ja $g(x) = \frac{x^3 - 3x - 1}{x + 2}$ kuvaajat koneella ja vastaa kuvien perusteella. Arvioi lukuarvot tarvittaessa yhden desimaalin tarkkuudella.

- (a) Onko funktiolla suurinta arvoa? Jos on, mikä se on ja missä funktio sen saavuttaa?
- (b) Onko funktiolla suurinta ja/tai pienintä arvoa välillä $] -2, 3]$? Mitkä ja missä?
- (c) Onko funktiolla paikallisia ääriarvoja? Mitkä ja missä?

5. Selvitä funktion f paikalliset ääriarvot ja niiden laatu. Onko funktiolla suurinta ja/tai pienintä arvoa?

- (a) $f(x) = x^3 + 3x^2$
- (b) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 28$

Lisäksi hahmottele (karkeasti) funktion kuvaajaa selvittämiesi tietojen perusteella.

6. Selvitä funktion f pienin ja suurin arvo annetulla välillä.

- (a) $f(x) = x^2$ välillä $[-1, 2]$
- (b) $f(x) = x^3 - 6x + 1$ välillä $[0, 2]$
- (c) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-5x}$ välillä $[1, 4]$

+Miten tilanne muuttuu, jos kohdassa c tutkitaan väliä $[-1, 4]$?

7. Selvitä funktion f paikalliset ääriarvot ja niiden laatu. Onko funktiolla suurinta ja/tai pienintä arvoa?

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{4}x^2 + 1$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{9x+1}$

(c) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

Lisäksi hahmottele (karkeasti) funktion kuvaajaa selvittämiesi tietojen perusteella.

8. (a) Tykinkuulan lentokorkeutta x hetkellä t kuvaa yhtälö $x(t) = -\frac{t^2}{18} + \frac{10t}{9}$. Kuinka korkealla kuula käy?

(b) Rakennat aitausta. Käytettävissäsi on 10 metriä aitaa ja lisäksi voit käyttää "aitana" rakennuksen suoraa seinää. Kuinka suuren suorakulmion muotoisen aitauksen voit rakentaa? Mitkä ovat aitauksen mitat?

9. (a) Laske funktion $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ kaikki derivaatat.

(b) Laske funktion $f(x) = e^{3x}$ viides derivaatta.

(c) Laske funktion $f(x) = \sin x$ neljä ensimmäistä derivaattaa. Mitä huomaat? Mikä on funktion f 25. derivaatta $f^{(25)}(x)$?

(d) Laske $f^{(10)}(x)$, kun $f(x) = \sin 2x$.

10. Missä funktio f on määritelty? Määritä funktion f suurin ja pienin arvo.

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ (b) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ (c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (d) $f(x) = \ln(x^2+x)$

Lisätehtävät

Tehtävät 11–12 liittyvät edellisen viikon aiheisiin.

11. (a) Millä välillä neliöjuurifunktion $f(x) = \sqrt{x}$ kasvunopeus on suurempi kuin logaritmifunktion $h(x) = \ln x$?

(b) Osoita, että funktio $f(x) = x - \frac{3}{\sqrt{x}}$ on kasvava. (Missä funktio on määritelty?)

(c) Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{x^3}$? Perustelee.

12. (a) Määritä $f'(-3)$, kun $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. [Syksyn 2010 pitkän mat. yo-kokeen tehtävä 1c.]

(b) Laske funktion $f(x) = \frac{2+\sin x}{2+\cos x}$ derivaatta pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$.
[Kevään 2008 pitkän mat. yo-kokeen tehtävä 3b.]

13. Määritä funktion $f(x) = x + \sqrt{9-x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$, suurin ja pienin arvo. Piirrä funktion kuvaaja. [Kevään 2008 yo-kokeen pitkän mat. tehtävä 9.]

14. (a) Kasvuston pinta-ala (neliömillimetreinä) on kääntäen verrannollinen kuluneen ajan (viikkoina) neliöjuureen. Ensimmäisen viikon lopussa kasvuston pinta-ala oli 10 mm^2 . Muodosta lauseke kasvuston pinta-alalle x viikon kuluttua ($x > 1$). Millä nopeudella kasvuston pinta-ala muuttuu 4 viikon kuluttua?

(b) Määritä suurimman sellaisen paketin mitat ja tilavuus, joka toteuttaa seuraavat ehdot: 1) paketti on suorakulmaisen särmiön muotoinen, 2) paketin korkeus on enintään 1 m ja 3) paketin avaruuslävistäjä on enintään 2 m.