

Harjoitus 6

- Piirrä funktioiden $f(x) = -x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x$ ja $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ kuvaajat koneella ja vastaa kuvien perusteella.
 - Millä väleillä funktio on kasvava? Arvioi yhden desimaalin tarkkuudella.
 - Millä väleillä funktio on vähenevä? Arvioi yhden desimaalin tarkkuudella.
 - Löytyykö kuvaajalta kohtia, joissa funktion kasvunopeus on nolla? Mistä?
- Piirrä funktioiden $f(x) = \frac{12x}{x^2+4}$ ja $g(x) = \frac{1}{3x^2+1}$ kuvaajat koneella ja vastaa kuvien perusteella.
 - Millä väleillä funktio on kasvava?
 - Löytyykö kuvaajalta kohtia, joissa funktion kasvunopeus on nolla? Mistä?
 - Löytyykö kuvaajalta kohta, jossa funktion kasvunopeus on suurimmillaan? Jos löytyy, arvioi suurinta kasvunopeutta kokonaisluvun tarkkuudella.
- Mikä oli auton keskinopeus, kun 138 km matkaan kului 1 tunti ja 30 minuuttia?
 - Mikä on funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 10]$, jos $f(2) = 17$ ja $f(10) = -3$?
 - Mikä on funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[a, b]$, jos $f(a) = 100$ ja $f(b) = 25$?
- Määritä funktion $f(x) = x^2 + x$ derivaatta kohdassa $x = -2$ kahdella tavalla:
 - laskemalla erotusosamäärän $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ raja-arvo, kun h lähenee nollaa, ja
 - laskemalla ensin derivointisääntöjen avulla derivaattafunktion $f'(x)$ lauseke.
- Derivoi.
 - $-2x^3 + 3x^2 + x$
 - $4x^2 + 5x + 3 \sin x - \cos x$
 - $-x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$
 - $\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x}$
- Derivoi.
 - $\frac{3x+1}{x^2-1}$
 - $x^3 \sin x$
 - $\cos(3x)$
 - $\tan(2x + \frac{\pi}{3})$
 - $e^x - 2e^{3x} + \ln(4x)$
- Selvitä derivaatan avulla, missä funktio f on kasvava, missä vähenevä.
 - $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$
 - $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
 - $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$
- Jos funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja kulkee pisteen $(2, 3)$ kautta, voidaananko päätellä, että i) kohdassa $x = 2$ funktion f muutosnopeus on 3, ii) funktion f derivaattafunktion kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 3, iii) funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ asetetun tangentin kulmakerroin on 3?

- (b) Kumman funktion muutosnopeus kohdassa $x = -1$ on suurempi, funktion $f(x) = 2x^{13} - 13x^2$ vai $g(x) = 4x^{15} - 15x^4$?
- (c) Onko funktio $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x - 3$ monotoninen? Onko sen muutosnopeus jossain kohdassa nolla?
- (d) Osoita, että luku -1 on yhtälön $x^7 = -5x^3 - x - 7$ ainoa ratkaisu.
9. (a) Mihin paraabelilla $y = -2x^2 + 4x + 6$ olevaan pisteeseen piirretty tangentti on vaakasuora?
- (b) Määritä funktion $f(x) = x^2 + 2x - 1$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin ja yhtälö.
- (c) Mihin paraabelin $y = 4x^2 + 6x + 3$ pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on 2? Muodosta tämän tangentin yhtälö.
- (d) Onko totta: mikään käyrälle $y = x^3 + 7x$ asetetuista tangenteista ei ole vaakasuora? Perustele.
10. (a) Mikä on käyrän $y = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion pinta-ala?
- (b) Määrää funktion $f(x) = \sqrt{4x - 1} - x$ nollakohdat sekä välit, joilla funktio on kasvava. Saako funktio arvoa 1?

Lisätehtävät

Tehtävät 11–13 liittyvät aiemmilla viikoilla käsiteltyihin aiheisiin.

11. (a) Ratkaise yhtälö $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mitkä ratkaisuista ovat välillä $[\pi, 2\pi]$? Käytä yksikköympyrää ja hahmottele tilannetta havainnollistava kuva.
- (b) Ratkaise yhtälö $\cos x = -\cos(x + \frac{4\pi}{5})$. (Voit käyttää tietoa $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$.)
12. (a) Mikä on $\tan x$, jos i) $\sin x = -\frac{5}{13}$ ja $\cos x = \frac{12}{13}$,
ii) kulmaa x vastaava yksikköympyrän kehän piste on $(-0,6; 0,8)$?
- (b) Ratkaise yhtälö $\tan x = \sqrt{3}$.
- (c) Ratkaise yhtälö $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{5}$.
13. Määritä funktioiden $f(x) = 2 \cos^2 x - 1$ ja $f(x) = 2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3$ nollakohdat.
14. (a) Hahmottele sellaisen funktion kuvaaja välillä $] -2, 5[$, jonka muutosnopeus on positiivinen väleillä $] -2, 1[$ ja $] 1, 2[$, negatiivinen välillä $] 2, 5[$ ja nolla kohdissa $x = 1$ ja $x = 2$.
- (b) Missä kohdassa funktion $f(x) = -3 \tan x$ derivaattafunktio saa arvon -4 ?
15. (a) Määritä funktion $f(x) = 2 \sin x - x$ derivaatta kohdassa nolla, derivaatan nollakohdat sekä kuvaajalle kohtaan $x = 3\pi$ asetetun tangentin yhtälö.
- (b) Määritä funktion $\frac{\sin x}{x}$, $x > 0$ derivaattafunktio ja derivaatta kohdassa 10π .
- (c) Mihin kohtiin funktion $f(x) = 3 - 2x + 6 \sin x$ kuvaajalle piirretyt tangentit ovat suoran $y = -5x + 6$ suuntaisia?
- (d) Laske funktion $\frac{2 + \sin x}{2 + \cos x}$ derivaatta pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$. (yo K2008/3b)