

Harjoitus 5

1. (a) Muunna asteina annetut kulmat radiaaneiksi: $30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 5^\circ$
(b) Muunna radiaaneina annetut kulmat asteiksi: $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
(c) Piirrä kohtien a ja b kulmat yksikköympyrälle. Kummasta tiedosta piirtäminen on helpompaa?
2. Millä yksikköympyrään piiretyllä välin $[0, 2\pi[$ suunnatulla kulmalla on sama loppukylki kuin annetulla kulmalla?
 - (a) 17π
 - (b) -10π
 - (c) 3690°
 - (d) $\frac{9\pi}{4}$
 - (e) $-\frac{13\pi}{3}$
3. Missä neljänneksessä kulman α loppukylki sijaitsee, kun sitä vastaava kehäpiste on P ? Määritä lisäksi $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$.
 - (a) $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
 - (b) $P = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
 - (c) $P = (0,345; -0,939)$
 - (d) $P = (0,100; 0,995)$
4. Päättele yksikköympyrän avulla, mitä ovat $\cos x$ ja $\sin x$, kun
 - (a) $x = 5\pi$
 - (b) $x = -4\pi$
 - (c) $x = -\frac{\pi}{2}$
 - (d) $x = \frac{5\pi}{2}$
 - (e) $x = -\frac{11\pi}{4}$
 - (f) $x = \frac{5\pi}{3}$
5. Tiedetään, että $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Laske
 - (a) $\cos(-\alpha)$
 - (b) $\cos(\alpha - 4\pi)$
 - (c) $\cos(\alpha + \pi)$

+Lisäksi piirrä tehtävän alussa annettu tieto yksikköympyrälle; kuinka monta mahdollisuutta kulman α kehäpisteelle on?

6. Laske.

(a) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$

(b) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$

(c) $\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\pi + \cos 3\pi$

7. Luettele, jos mahdollista, viisi suunnattua kulmaa α , joille

(a) $\sin \alpha = 1$

(b) $\cos \alpha = 0,5$

(c) $\sin \alpha = -\sqrt{2}$.

8. Tiedetään, että $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ ja $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Määritä $\sin \alpha$.

Vinkki: Pythagoraan lause auttaa.

9. Ratkaise yhtälö, kun $x \in [0, 2\pi[$. Osaatko antaa myös kaikki ratkaisut?

(a) $\sin x = \frac{1}{2}$

(b) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\sin x = \sin \frac{\pi}{7}$

(d) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$

(e) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$

10. Millä muuttujan x arvoilla funktiot f ja g saavat saman arvon?

(a) $f(x) = \cos x$ ja $g(x) = \cos^2 x = (\cos x)^2$

(b) $f(x) = \cos 2x$ ja $g(x) = \cos 4x$

(c) $f(x) = \sin 2x$ ja $g(x) = \sin 3x$

Lisätehtävät

Tehtävät 15 – 18 liittyvät aiemmilla viikoilla käsiteltyihin aiheisiin.

11. Etsi sellaiset reaalityöt x ja y , että $\sin(x + y) \neq \sin x + \sin y$. (Mikä on tarinan opetus?)

12. (a) Laske $\tan x$, kun $\sin x = \frac{4}{5}$ ja $\cos x = \frac{3}{5}$.

(b) Mitä lukuja voivat olla $\sin x$ ja $\tan x$, jos $\cos x = \frac{1}{4}$?

(c) Laske $\tan x$, kun $\cos x = -\frac{1}{5}$ ja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

(d) Laske $\sin x$ ja $\cos x$, kun $\tan x = -2$ ja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Vinkki: Kohdissa b-d lienee apua Pythagoraan lauseesta ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

13. Ratkaise yhtälö.

(a) $4 \cos^2 x - 3 = 0$ (b) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ (c) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$

14. (a) Jos luvuista a ja b tiedetään, että $\cos a = \cos b$, mitä oikeastaan tiedetään? Selitä ensin sanallisesti yksikköympyrän avulla ja kirjoita sen jälkeen yhtälöksi, jossa ei esiinny trigonometrisia funktioita.
- (b) Ratkaise yhtälö $\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.
- (c) Kuten kohta a, mutta tietona $\sin a = \sin b$.
- (d) Etsi yhtälö, jonka voit ratkaista edellisen kohdan avulla, ja ratkaise se.
15. Ratkaise.
- (a) $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 = 4x$
- (b) $x^4 - 3x^2 = 4$
- (c) $x^2 > 8$
- (d) $x^3 + 2 \leq 2x^2 + x$
16. Ratkaise. (Kohta a on syksyn 2012 yo-kokeen pitkän mat. tehtävä 1c.)
- (a) $1 - x = \frac{1}{1 - x}$
- (b) $\frac{2x^2}{x} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$
- (c) $\frac{3x + 1}{x - 1} \geq 4$
17. Ratkaise. (Kohta b on syksyn 2000 yo-kokeen pitkän mat. tehtävä 2.)
- (a) $\sqrt{4x - 1} - 3 = 0$
- (b) $\sqrt{x - 2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x - 2}}$
- (c) $\sqrt{1 - 2x} < 2$
18. (a) Laske $\log_3 81$, $\log_7 7$ ja $9^{\log_9 5}$.
- (b) Laske $\ln e^2$, $\ln e + \ln 1 - \ln(3e^4)$ ja $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{10000}}$.
- (c) Ratkaise yhtälö $2 \log_6 x = 1 - \log_6(x^2 + 1)$.
- (d) Ratkaise yhtälö $3 \cdot 2^x = 21$.