

Matematiikan propedeuttinen kurssi (MATY010), syksy 2019

Harjoitus 4

1. Mikä on funktion määrittelyjoukko? Entä arvojoukko? Vastaa ilman perusteluja.

(Käytä tarvittaessa koneella piirtämääsi kuvaajaa apuna.)

(a) $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = (x + 2)^3$, $h(x) = (1 + x)^4 - 2$
(b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$, $h(x) = \sqrt{1 - x} - 5$
(c) $f(x) = (x - 1)^{-2}$, $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $h(x) = (x - 2)^{-\frac{1}{4}} + 3$

2. (a) Kirjoita $x\sqrt[3]{x}$, $\sqrt{y^5}$ ja $\frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ murtopotenssimuodossa.
(b) Kirjoita murtopotenssit $x^{\frac{3}{2}}$ ja $y^{-\frac{7}{4}}$ juurimerkinnän avulla ja sievennä.
(c) Mitkä seuraavista ovat sama luku kuin $\frac{\sqrt{2}}{2}$? Perustele (ilman likiarvoja).

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \frac{2}{\sqrt{8}}, \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{8}, \quad 2^{\frac{1}{2}}, \quad 2^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{2}{2^{\frac{1}{2}}}$$

3. (a) Ratkaise yhtälöt $5 - x^5 = 4$ ja $9(5 - y)^8 = 9$.
(b) Ratkaise yhtälöt $x^{\frac{1}{2}} = 4$, $y^{\frac{2}{3}} = 3$ ja $z\sqrt{z} = 1000$.

4. Ratkaise.

(a) $\sqrt{x + 1} = 3$ (b) $\sqrt[3]{x - 5} = -2$ (c) $\sqrt[4]{2x + 5} = 1$
(d) $\sqrt{x} = x$ (e) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2 = 1$

5. Piirrä koneen avulla sopivat kuvaajat, hahmottele vastaavat kuvat paperille (karkeasti) ja ratkaise edellisen tehtävän yhtälöt graafisesti.

6. Ratkaise. Tarkista kuvan avulla (voit piirtää kuvat koneella).

(a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2$ (b) $\sqrt{9 - x^2} + 1 = 0$ (c) $\sqrt{2x + 5} = -x + 5$

7. Laske.

(a) $\log_2 2^7$ (b) $3^{\log_3 5}$ (c) $\log_6 3 + \log_6 12$ (d) $\lg 5 - \lg 500$ (e) $\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}}$

8. Ratkaise.

(a) $\log_2 x = 5$ (b) $\log_3 x = 0$ (c) $\log_4 x = -1$ (d) $3 \cdot 5^x - 75 = 0$

9. Ratkaise. (Kohta b on osa kevään 1990 ylioppilaskokeen pitkän oppimäärän tehtävää 1a hieman muokattuna.)

(a) $\ln x = 5$ (b) $\frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{6}$ (c) $x(e^{3x} - 8) = 0$ (d) $e^{2x} - 4e^x = 0$

10. Tutki kohdissa a ja b mainittuja funktioita.

- Mikä on funktion määrittelyjoukko? (Perustele lyhyesti, miten löydät määrittelyjoukon.)
- Entä arvojoukko? (Tämän voit jättää perustelematta.)
- Hahmottele karkeasti funktion kuvaajaa. (Ohje: laske arvoja muutamassa pisteessä tai käytä konetta apuna; missä kuvaaja leikkaa koordinaattiakselit?)
- Onko kuvaajalla asymptootteja?

(a) $f(x) = 3^x + 1$, $g(x) = 2^{-x}$, $h(x) = 10^x$

(b) $f(x) = \log_3(x - 5)$, $g(x) = \ln 2x + 3 = \ln(2x) + 3$, $h(x) = \lg(x^2 + 1)$

Lisätehtävät

Tehtävät 11, 12 ja 13 sekä osin 15 liittyvät aiemmilla viikoilla käsiteltyihin aiheisiin.

11. Ratkaise. (Kohta a on syksyn 2010 ylioppilaskokeen pitkän oppimäärän tehtävä 2a.)

(a) $x\sqrt{7}-3 \leq 4x$ (b) $x^2 < x$ (c) $3-x > -x$ (d) $x-4 \geq x$ (e) $-x^2 \geq 0$

12. Ratkaise.

(a) $x^2+2x-3 > 0$ (b) $(x^2+2x-3)(x+2) > 0$ (c) $(x^2+2x-3)(x^2-4) > 0$

13. Ratkaise.

(a) $(2x - 5)(x^2 + 3x - 2) = (2x - 5)(x - 2)$

(b) $(3 - 2x)(x - 1)^2 \leq 0$

(c) $x^4 + 4x^2 - 5 > 0$

14. Eräessä kaupungissa oli vuoden 2005 alussa 124000 asukasta ja vuoden 2015 alussa 137000 asukasta. Kuinka monta prosenttia oli vuotuinen väestönkasvu, jos oletetaan, että väestö kasvoi joka vuosi yhtä monta prosenttia edellisvuoteen verrattuna?

15. (a) Onko luku $3 - \sqrt{2}$ luvun $11 - 6\sqrt{2}$ neliöjuuri? Perustele.

(b) Laske lausekkeen $(3^a)^b + 3^a \cdot 3^b$ arvo, kun luvut a ja b ovat yhtälön $x^2 + 2x - 1 = 0$ ratkaisut.