

Harjoitus 3

1. Päättele ensin polynomifunktion f asteluku. Sen jälkeen sievennä lauseke muotoon, jossa ei näy sulkeita. Mikä on kolmannen asteen termin kerroin?

$$(a) f(x) = 5x^2 \cdot 4x^3 \quad (b) f(x) = -2x^3 \cdot (-x^8) \quad (c) f(x) = 2x(x^2 + x^5 - 4)$$

$$(d) f(x) = (x^2)^3 - x(2x)^2 - (-x^2 + 3x - 2) \quad (e) f(x) = (2x)^2 - (x - 1)^2$$

2. Kuten tehtävä 1, mutta lisäksi laske funktion f nollakohdat. (Mistä muodosta se on helpointa tehdä?)

$$(a) f(x) = x^2(x^2 - 2)(x + 3) \quad (b) f(x) = (2x^3 + 1)^2 \quad (c) f(x) = (2x + 1)(3x - 1)(x + 2)$$

3. (a) Laske polynomien $P(x) = 2x - 5$ ja $Q(x) = 3x^2 + 1$ summa, erotus ja tulo.
 (b) Muodosta se toisen asteen polynomifunktio g , jonka toisen asteen termin kerroin on 1, vakiotermi on 3 ja jolle $g(-3) = 6$.
 (c) Sievennä muistikaavojen avulla $(2x + 5)^2$ ja $(3x + 1)(3x - 1)$.

4. Ratkaise.

$$(a) (x + 2)^2 = (x - 4)(x + 4) \quad (b) x^3 + 16x^2 = 0 \quad (c) x^3 - 16x = 0 \quad (d) x^5 - 16x = 0$$

5. Ratkaise. Sen jälkeen piirrä kuva (koneella) ja tarkista, että ratkaisusi vastaa kuvan tietoja.

$$(a) x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0 \quad (b) x^5 \leq 4x^3 \quad (c) x^3 - x^2 - 9x + 9 \geq 0 \quad (d) x^7 + 2x^6 - x - 2 < 0$$

6. Selvitä funktion f määrittelyjoukko ja nollakohdat sekä millä väleillä funktion arvo on positiivinen.

$$(a) f(x) = \frac{x - 1}{2 - x} \quad (b) f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 3} \quad (c) f(x) = \frac{5}{2 - 3x} \quad (d) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

7. Piirrä kunkin tehtävässä 6 tutkimasi funktion kuvaaja koneella, hahmottele kuvaaja paperille ja merkitse kuvaan tehtävässä 6 pyydetty tiedot. Merkitse lisäksi kaikki löytämäsi asymptootit.

8. Ratkaise.

$$(a) \frac{3x - 6}{x^2 - 4} = 2 \quad (b) \frac{x}{1 - 2x} < 1 \quad (c) \frac{1}{x^2} + x > 0 \quad (d) \frac{x}{x + 3} - \frac{2}{x - 3} = 0$$

9. Tarkista ratkaisusi piirtämällä sopivat kuvaajat koneella.

- (a) Keksi lauseke rationaalifunktiolle f , jota ei ole määritelty kohdassa $x = 1$ ja jolla on nollakohta $x = 2$.
 (b) Millä muuttujan x arvoilla funktiot $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ja $g(x) = x$ saavat saman arvon?
 (c) Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ kuvaaja kulkee funktion $g(x) = \frac{x}{x-1}$ kuvaajan alapuolella?
 (d) Voiko luvun x käänteisluku olla suurempi tai yhtäsuuri kuin lukujen $x + 1$ ja $x + 2$ käänteislukujen summa?

10. (a) Joki virtaa 6 km/h. Vakionopeudella myötävirtaan päästiin puolen tunnin aikana 14 km ja vastavirtaan samalla nopeudella ja samassa ajassa 8 km. Mikä oli veneen nopeus? Vinkit: nopeus = matka/aika, joten aika = matka/nopeus; myötävirtaan kuljettaessa veneen nopeuteen lisätään joen virtausnopeus, vastavirtaan kuljettaessa vähennetään.
- (b) Erään mallin mukaan lääkeaineen määrää veressä (mikrogrammoina) kuvaa funktio $f(x) = \frac{4x}{x^2+5}$, missä x on lääkkeen antamisesta kulunut aika (minuutteina). Milloin lääkettä on veressä yli 0,4 mikrogrammaa?
- (c) Erään mallin mukaan liikennevalo palaa keltaisella $f(x) = \frac{x^2+8x+224}{8x}$ sekuntia, kun nopeusrajoitus risteyksen alueella on x km/h. Kuinka pitkään valo on keltaisella, jos risteysalueen nopeusrajoitus on 50 km/h?

Lisätehtävät

Tehtävät 11, 12 ja 14 sekä osin myös 13 liittyvät aiemmilla viikoilla käsiteltyihin aiheisiin.

11. (a) Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = 2x - 3$ arvo on suurempi kuin funktion $g(x) = 4 - 3x$ arvo? Selvitä kysymys ensin laskemalla, sen jälkeen piirrä funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon ja merkitse kuvaan, miten näet ratkaisun kuvasta.
- (b) Suorakulmion toisen sivun pituus on 7,5 km. Millä toisen sivun pituuden arvoilla suorakulmion pinta-ala on vähintään 40 km² (neliökilometriä)?
- (c) Ainolla on nyt 2400 ja Ellillä 1500 euroa säästössä. Jos Aino säästää 110 e/kk ja Elli 160 e/kk, milloin Ellin säästöt saavuttavat Ainon säästöt?
12. (a) Ratkaise kaksoisepäyhtälö $1 < 3x + 2 < x + 4$. (Ohje: pilko ensin kahdeksi eri epäyhtälöksi, ratkaise kumpikin erikseen ja lopuksi mieti, miten saat ratkaisuisista rakennettua alkuperäisen kaksoisepäyhtälön ratkaisun.)
- (b) Näytä, että epäyhtälö $3x^2 - x + 5 \geq 2x^2 + x + 4$ on aina tosi. Toteutuuko yhtäsuuruus millään muuttujan arvolla?
- (c) Millä muuttujan x arvoilla suora $y = -2x - 3$ on paraabelin $y = x^2 + x - 3$ yläpuolella?
13. (a) Millä vakion a arvoilla piste (3, 2) on funktion $f(x) = ax + a + 1$ kuvaajan alapuolella?
- (b) Millä vakion a arvoilla epäyhtälö $ax^2 + 2ax + 1 > 0$ on aina tosi?
- (c) Millä vakion a arvoilla epäyhtälö $x^6 - ax^3 + 3 > 0$ on aina tosi?
14. Onko totta? Perustele.
- (a) Jos kertoimet a ja c ovat erimerkkiset, niin funktiolla $f(x) = ax^2 + bx + c$ on kaksi nollakohtaa. Huom. nolla ei ole "minkään merkinen" - eli kumpikaan mainituista kertoimista ei voi olla nolla.
- (b) Yhtälöllä $x^2 + (a + 2)x + 2a = 0$ on ratkaisuja vakion a arvosta riippumatta.
15. Muodosta jokin
- (a) kolmannen asteen polynomifunktio, jonka arvo on negatiivinen väleillä $] - \infty, -1[$ ja $]0, 1[$ sekä positiivinen väleillä $] - 1, 0[$ ja $]1, \infty[$.
- (b) kolmannen asteen polynomifunktio, jonka arvo on positiivinen vain välillä $] - \infty, 2[$.
- (c) neljännen asteen polynomifunktio, jonka arvo on negatiivinen tai nolla täsmälleen silloin, kun $-2 \leq x \leq 2$.