

## Harjoitus 10

Tehtävät 7–10 sekä lisätehtävät 12–14 liittyvät aiemmilla viikoilla käsiteltyihin aiheisiin.

1. (a) Ilmoittaudu kurssitenttiin kurssin TIM-sivulla (ellet ole jo niin tehnytkin).
- (b) Tiedetään, että  $a = 3$  ja  $b = 6$ . Voidaanko päätellä, että
  - i. luku  $a$  ei ole nolla
  - ii. luku  $a$  on parillinen tai luku  $b$  on parillinen
  - iii. luku  $a$  on parillinen ja luku  $b$  on parillinen
  - iv.  $a < 5$  tai  $b < 15$ ?
- (c) Tiedetään, että jos ajokokeessa ajaa kolarin, niin koe hylätään. Mitä voit päätellä, jos ajokokeessa henkilö i) ei aja kolaria, ii) ajaa kolarin, iii) hylätään?
2. (a) Tarkastellaan luonnollista lukua  $n$  ja merkitään  $A = "n \text{ on parillinen}"$  sekä  $B = "n \text{ on jaollinen viidellä}"$ . Tulkitse sanallisesti seuraavat yhdistetyt lauseet ja tutki, mitkä niistä ovat tosia, kun  $n = 42$ .

$$(i.) A \wedge B \quad (ii.) A \wedge (\neg B) \quad (iii.) \neg(A \wedge B)$$

- (b) Merkitään  $A = "syön salmiakkia"$  ja  $B = "juon kahvia"$ . Ilmaise seuraavat yhdistetyt lauseet sanallisesti mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa.

$$(i.) (A \vee B) \wedge A \quad (ii.) ((\neg A) \wedge B) \vee A \quad (iii.) (\neg(A \wedge B)) \wedge A$$

3. (a) Kirjoita sanallisessa muodossa seuraavien väitelauseiden negaatiot.

$$(i.) x_1 = x_2 \quad (ii.) a > -4 \quad (iii.) 2 < b \leq \pi \quad (iv.) c^2 > 0$$

- (b) Kirjoita väitelauseita  $A = "x = 0"$ ,  $B = "x > 0"$ ,  $C = "x = 10"$  ja  $D = "x < 10"$  sekä konnektiiveja käyttäen merkintä

$$(i.) x \neq 10 \quad (ii.) x \leq 0 \quad (iii.) 0 \leq x < 10 \quad (iv.) x < 0 \text{ tai } x > 10$$

- (c) Onko totta, että

$$(i.) 3 \geq 3 \quad (ii.) x > 7 \implies x \geq 7 \quad (iii.) xy > 0 \iff x > 0 \text{ ja } y > 0?$$

4. (a) Kirjoita lauseiden negaatiot sanallisesti mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa. i) Luku on negatiivinen. ii) Kaikki ilmoittautuneet ovat paikalla. iii) Vähintään yksi luvuista on pariton. iv) Ainakin yksi hakijoista ei ollut pätevä.
- (b) Kolikkoa heitetään 4 kertaa. Kirjoita merkinnän  $A_n = "n:n\text{nnellä heitolla saadaan klaava}"$  ja konnektiivien avulla i) kaikilla 4 heitolla saadaan klaava, ii) ainakin yhdellä heitolla saadaan klaava, iii) täsmälleen yhdellä heitolla saadaan klaava, iv) korkeintaan kolmella heitolla saadaan klaava.
5. (a) Selvitä totuustaulun avulla, milloin  $(A \implies B) \vee B$  on tosi.
- (b) Selvitä totuustaulun avulla, milloin  $A \wedge (B \implies (A \vee C))$  on tosi.
- (c) Mitkä seuraavista ovat tautologioita?  
 I:  $A \implies (A \wedge B)$ , II:  $(A \wedge B) \implies A$ , III:  $A \implies (A \vee B)$ , IV:  $(A \vee B) \implies A$

6. (a) Mitkä seuraavista ovat keskenään loogisesti ekvivalentteja? Perustele totuustaulujen avulla. I:  $A \implies (B \vee C)$ , II:  $(A \wedge B) \implies C$ , III:  $(A \wedge \neg C) \implies B$
- (b) Onko  $\neg(\neg(A \implies B) \vee \neg(B \implies \neg A))$  tosi vai epätosi, kun A ja B ovat tosia? Selvitä käyttäen i) totuustauluja, ii) loogisesti ekvivalentteja väitelauseita luentorungon kohdasta 19.3.1.
7. Käsitellään funktioita  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  ja  $g(x) = x^3 - 2$ .
- (a) Kirjoita tulofunktion lauseke  $f(x)g(x)$  ja sievennä se. Sen jälkeen derivoi tulofunktio käyttäen i) sieventämääsi lauseketta, ii) funktioiden  $f$  ja  $g$  lausekkeita sekä tulon derivointisääntöä.
- (b) Kirjoita yhdistetyn funktion  $f(g(x))$  lauseke ja sievennä se. Sen jälkeen derivoi yhdistetty funktio käyttäen i) sieventämääsi lauseketta, ii) funktioiden  $f$  ja  $g$  lausekkeita sekä yhdistetyn funktion derivointisääntöä.
8. (a) Derivoi  $2 \sin(x^2 + 1)$ . (b) Etsi funktion  $\ln(x^3 - x)$  määrittelyalue ja ääriarvot.<sup>1</sup>
9. (a) Laske paraabelien  $y = x^2 - x + 1$  ja  $-x^2 + 3x + 1$  rajoittaman alueen pinta-ala. (b) Laske funktion  $f(x) = 2e^x - 1$  kuvaajan ja koordinaattiakselien väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. (c) Laske käyrien  $y = 3x$  ja  $y = x^3 + 2x^2$  rajaaman kaksiosaisen alueen pinta-ala.
10. (a) Selvitä ympyrän  $x^2 + y^2 - 5y = 0$  keskipiste ja säde. (b) Määritä käyrän  $y = x^3 + 1$  ja sen pisteeseen  $(1, 2)$  piirretyn tangentin leikkauspiste.<sup>2</sup>

### Lisätehtävät

11. (a) Jos Maija ei ole koulussa, hän leikkii karitsan kanssa. Mitä voit päätellä, jos i) Maija on koulussa, ii) Maija leikkii karitsan kanssa, iii) Maija ei ole koulussa, iv) Maija ei leiki karitsan kanssa? (b) Esitä ekvivalenssi "luku on jaollinen luvulla 10 täsmälleen silloin, kun luvun viimeinen numero on 0" kahtena implikaationa. Kumpaa näistä implikaatioista voidaan käyttää, kun halutaan selvittää, onko luku 98765 jaollinen luvulla 10?
12. Suorat  $y = 2x$ ,  $x - y = 1$  ja  $x - 3y + 5 = 0$  rajoittavat kolmion. Mikä on kolmion pinta-ala?
13. (a) Määritä funktion  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  suurin ja pienin arvo välillä  $0 \leq x \leq 2\pi$ .<sup>3</sup> (b) Määritä funktion  $(x^2 - x - 5)e^{-x}$  suurin ja pienin arvo, kun  $x \geq 0$ .<sup>4</sup>
14. Paraabelin  $y = x^2$  pisteeseen  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 \in ]0, 1]$ , piirretty tangentti,  $x$ -akseli ja suora  $x = 1$  muodostavat kolmion. Millä arvolla  $x_0$  tämä kolmio on pinta-alaltaan suurin?<sup>5</sup>
- 15.\*  $R$ -säteisen pallon ympäri asetetaan mahdollisimman pieni neliöpohjainen suora pyramidi siten, että pallo sivuaa pyramidin pohjaa ja sivutahkoja. Laske pallon tilavuuden suhde pyramidin tilavuuteen.<sup>6</sup>

<sup>1</sup>Syksyn 2004 yo-kokeen tehtävä 6.

<sup>2</sup>Syksyn 1992 yo-kokeen tehtävä 4a.

<sup>3</sup>Kevään 2018 yo-tehtävä 3. Vastaukset viimeaikaisiin yo-tehtäviin: <http://matta.hut.fi/matta/yoteht/>

<sup>4</sup>Kevään 2013 yo-kokeen tehtävä 5.

<sup>5</sup>Kevään 2009 yo-kokeen tehtävä 7.

<sup>6</sup>Kevään 2002 yo-tehtävä 10. Vinkki:  $V_{pallo} = \frac{4\pi r^3}{3}$ ,  $V_{pyramidi} = \frac{A_{pohja} \cdot h}{3}$