Johdatus stokastiikkaan
Harjoitus 8

To 11.3.2010 klo 12–14 (MaD 381)

(1) Osoita Hölderin epäyhtälöä käyttäen, että $\mathbb{E}|f|^p < \infty \Longrightarrow \mathbb{E}|f|^r < \infty$ kaikilla $0 < r \leq p$.

(2) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään välin $[0,1]$ σ–algebra

$$\mathcal{F} := \sigma\left\{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \; k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$$

(a) Miksi funktio $f(x) = x, \quad x \in [0,1]$ ei ole $\mathcal{F}$–mitallinen?

(b) Anna esimerkki $\mathcal{F}$–mitallisesta funktiosta.

(3) Olkoon $\mathcal{G} := \sigma\{(a,b), \; 0 < a < b < 1\}$ välin $[0,1]$ σ-algebra. Mitkä jatkuvat funktiot $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat $\mathcal{G}$-mitallisia?

(4) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mitallinen kuvaus. Osoita, että jos $\mathbb{P}(A)$ on 0 tai 1 jokaiselle $A \in \mathcal{F}$, niin

$$\mathbb{P}(\{\omega : f(\omega) = c\}) = 1 \text{ jollekin vakiolle } c.$$

(5) Olkoot $m \in \mathbb{R}$ ja $\sigma > 0$. Oletetaan, että satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla m ja varianssilla σ^2. Laske

(a) satunnaismuuttujan f neljäs momentti

(b) $\mathbb{E}g(f)$, kun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \mathbb{I}_{[m,\infty[}(x)$.

(6)&(7) Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia ja $0 < p < \infty$ s.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|f_n|^p < \infty.$$

Osoita, että $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \to 0 \text{ kun } n \to \infty\}\right) = 1$

(6) käyttämällä Borel-Cantellin lemmaa ja Chebyshevin epäyhtälöä joukoille $A_n^N := \left\{\omega : |f_n(\omega)| \geq \frac{1}{N}\right\}$

(7) käyttämällä sopivaa konvergenssilausetta.