Johdatus stokastiikkaan
Harjoitus 7

To 4.3.2010 klo 12–14 (MaD 381)

Huomaa muuttunut aika!

(1) "Vastaesimerkki" dominoidun konvergenssin lauseelle:
Olkoon $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ todennäköisyysavaruus ja määritellään funktiot

$$f_n(x) := n\mathbb{1}_{[0,1/n]}(x), \;\; x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(a) Laske $\mathbb{E} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Laske $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f_n(x)$.

(c) Miksi $\mathbb{E} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f_n(x)$?

(2) Tasajakauma:

Olkoon $([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \frac{\lambda}{b-a})$ todennäköisyysavaruus, missä $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Osoita, että

$$\mathbb{E} f = \int_{[a,b]} f(\omega) \frac{1}{b-a} d\lambda(\omega) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{missä} \quad f(\omega) := \omega.$$

(b) Laske

$$\mathbb{E} g = \int_{[a,b]} g(\omega) \frac{1}{b-a} d\lambda(\omega), \quad \text{missä} \quad g(\omega) := \omega^2.$$

(c) Laske varianssi $\mathbb{E}(f - \mathbb{E} f)^2$ satunnaismuuttujalle $f(\omega) := \omega$.
Vihje: Käytä kohtia a) ja b).

(3) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia mitallisia porrasfunktioita. Osoita, että

$$\mathbb{E} fg = \mathbb{E} f \mathbb{E} g.$$

(4) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $f_1, f_2, \ldots$ ei-negatiivisia satunnaismuuttujia ja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k < \infty$ $m.v.$ Osoita, että

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} f_k \quad (\leq \infty).$$

Vihje: Lause 3.2.4

(5) Olkoot satunnaismuuttujat f ja g riippumattomia ja Poisson-jakautuneita parametrein λ_1 ja λ_2. Osoita, että $f + g$ on Poisson-jakautunut laskemalla

$$\mathbb{P}_{f+g}(\{k\}) = \mathbb{P}(f + g = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(f = l, g = k - l) = \dots .$$

Mikä on tämän Poisson-jakauman parametri?