Johdatus stokastiikkaan
Harjoitus 6

To 25.2.10 klo 16–18 (MaD 380)

(1) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia siten, että

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{ja} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j},$$

missä $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ja $A_i, B_j \in \mathcal{F}$. Oletetaan, että $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ja $\{B_1, \ldots B_m\}$ ovat riippumattomia ($\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)$ kaikille i,j). Osoita, että

$$\mathbb{E}fg = \mathbb{E}f\mathbb{E}g.$$

(2) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$. Osoita, että

(a) $\liminf_{n\to\infty} \big(\mathbb{1}_{A_n}(\omega)\big) = \big(\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}\big)(\omega)$ kaikille $\omega \in \Omega$, ja

(b) $\limsup_{n\to\infty} \big(\mathbb{1}_{A_n}(\omega)\big) = \big(\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}\big)(\omega)$ kaikille $\omega \in \Omega$.

(3) Osoita luennon lauseen 3.2.1. kohta (4).

(4) Osoita luennon lauseen 3.2.1. kohta (5).
Vihje tehtäviin (3) ja (4): Tarvittaessa voit hakea vauhtia monisteen sivulta 83.

(5) Olkoon $((0,1], \mathcal{B}((0,1]), \lambda)$ todennäköisyysavaruus ja

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ irrationaalisille } x \in (0,1] \\ \frac{1}{x} \text{ rationaalisille } x \in (0,1] \end{cases}$$

Laske $\mathbb{E}f$.

(6) Osoita luennon lauseen 3.2.3. kohta (2).