Johdatus stokastiikkaan
Harjoitus 5

To 18.2.10 klo 16–18 (MaD 380)

(1) Näytä Lause 2.1.4.

(2) Osoita Lauseen 2.1.5. kohta (4).

(3) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. Osoita, että f on mitallinen jos ja vain jos f on vakiofunktio.

(4) Olkoot $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ mitallisia avaruuksia ja funktiot f ja g siten, että $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ on $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-mitallinen ja $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ on $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$-mitallinen. Osoita, että $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$,

$$(g \circ f)(\omega_1) := g(f(\omega_1)),$$

on $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3)$-mitallinen.

(5) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, (M, Σ) mitallinen avaruus ja $f : \Omega \to M$ $(\mathcal{F}, \Sigma)$-mitallinen. Osoita, että

$$\mu(B) := \mathbb{P}\left(\{\omega : f(\omega) \in B\}\right), \quad B \in \Sigma,$$

on todennäköisyysmitta sigma-algebrassa Σ.

(6) Olkoot tuloavaruus $([0,1] \times [0,1], \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{B}([0,1]), \lambda \times \lambda)$ ja satunnaismuuttujat $f(x,y) := \mathbb{1}_{[0,p)}(x)$ ja $g(x,y) := \mathbb{1}_{[0,p)}(y)$, missä $0 < p < 1$. Osoita, että

(a) f ja g ovat riippumattomia,

(b) $(f+g)$:n laki, $\mathbb{P}_{f+g}(\{k\})$, $k = 0, 1, 2$, on binomijakauma $\mu_{2,p}$.

Ehdotus: Kohdassa (a) merkitse $f^{-1}(A) = C_A \times [0,1]$ ja $g^{-1}(B) = [0,1] \times C_B$, missä joukot C_A ja C_B voit kirjoittaa eksplisiittisesti, riippuen siitä kuuluvatko 0 ja 1 joukkoihin A ja B.