Johdatus stokastiikkaan
Harjoitus 4

To 11.2.10 klo 16–18 (MaD 380)

(1) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Jos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ovat riippumattomia, niin mikä on todennäköisyys, että äärettömän monta näistä tapahtumista ilmenee, jos

(a) $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$,

(b) $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n^2}$?

(2) Oletetaan, että on annettu lukujono $(k_i)_{i=1}^{\infty}$, missä $k_i \in \mathbb{N}$. Pelataan äärettömän monta kierrosta seuraavaa peliä: heitetään i:nnellä kierroksella k_i kertaa noppaa, jolla 6:n todennäköisyys on 1/6.
Voitetaan 1. kierroksella, jos kaikki k_1 heittoa antavat luvun 6.
Voitetaan 2. kierroksella, jos kaikki k_2 heittoa antavat luvun 6.
jne.
Osoita, että

(a) Voitetaan äärettömän monta kertaa todennäköisyydellä 1 jos ja vain jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k_n} = \infty.$$

(b) Hävitään äärettömän monta kertaa todennäköisyydellä 1.

Vihje: Borel-Cantellin lemma.

(3) Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funktio ja $A_1, A_2, \cdots \subseteq \mathbb{R}$. Osoita, että

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i).$$

(4) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $A \subseteq \Omega$ joukko. Osoita, että $A \in \mathcal{F}$ jos ja vain jos $\{\omega \in \Omega : \mathbb{I}_A(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ kaikille $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(5) Osoita Lauseen 2.1.5 kohta (1).

(6) Täydennä lauseen 2.2.9 todistus osoittamalla, että satunnaismuuttujan g jakaumafunktiolle $F_g(x) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : g(\omega) \leq x\}\right)$ pätee

$$\lim_{x \to -\infty} F_g(x) = 0 \ \text{ ja } \ \lim_{x \to \infty} F_g(x) = 1.$$