Johdatus stokastiikkaan
Harjoitus 3

To 4.2.10 klo 16–18 (MaD 380)

(1) Binomijakauma: Olkoot $0 < p < 1$, $\Omega := \{0, 1, 2, ..., n\}$, $n \geq 1$, $\mathcal{F} := 2^\Omega$ ja

$$\mu_{n,p}(B) := \sum_{k \in B} \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k.$$

(a) Onko $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_{n,p})$ todennäköisyysavaruus?

(b) Laske $\max_{k=0,...,n} \mu_{n,p}(\{k\})$, jos $p = \frac{1}{2}$.

(2) Geometrinen jakauma: Olkoot $0 < p < 1$, $\Omega := \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathcal{F} := 2^\Omega$ ja

$$\mu_p(B) := \sum_{k \in B} p(1-p)^k.$$

(a) Onko $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$ todennäköisyysavaruus?

(b) Laske $\mu_p(\{0, 2, 4, 6, ...\})$.

(3) Poisson-jakauma: Olkoon $\lambda > 0$, $\Omega := \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathcal{F} := 2^\Omega$ ja

$$\pi_\lambda(B) := \sum_{k \in B} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(a) Onko $(\Omega, \mathcal{F}, \pi_\lambda)$ todennäköisyysavaruus?

(b) Laske $\sum_{k \in \Omega} k\pi_\lambda(\{k\})$.

(4) Olkoot $\Omega = \{\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) : \varepsilon_i = \pm 1\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ja $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/8$ kaikille $\omega \in \Omega$. Osoita, että joukot

$$A = \{\omega : \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_3 = -1\} \quad \text{ja} \quad B = \{\omega : \varepsilon_2 = -1\}$$

ovat riippumattomia.

(5) Todista Bayesin kaava (Lause 1.2.15).

(6) Oletetaan, että meillä on 10 kolikkoa, joista i:nnen kolikon heitto tuottaa kruunan todennäköisyydellä $\frac{i}{10}$, $i = 1, 2, \ldots, 10$. Valitaan satunnaisesti yksi kolikko. Mikä on ehdollinen todennäköisyys sille, että on valittu viides kolikko, kun tiedetään, että heiton tulos oli kruuna? Vihje: Käytä Bayesin kaavaa.

(7) Osoita, että $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$.

Huom. Tehtävissä 1-3 mitan σ-additiivisuutta ei tarvitse osoittaa, koska jos Ω on numeroituva ja $p_\omega \geq 0$ siten, että $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega < \infty$, niin diskreetille joukkofunktiolle

$$\mu(B) = \sum_{\omega \in B} p_\omega$$

pätee aina

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} p_\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in B_i} p_\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i),$$

kun joukot B_i ovat pistevieraita.