Johdatus stokastiikkaan
Harjoitus 2

To 28.01.10 klo 16–18 (MaD 380)

(1) Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja

$$\mathcal{G} := \{(a,b); -\infty < a < b < \infty\}.$$

Osoita että $\{x\} \in \sigma(\mathcal{G})$, missä $\{x\}$ on vain luvun x sisältävä joukko.

(2) Olkoon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ rationaalilukujen joukko. Onko totta, että $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

(3) Olkoon $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että $\mathcal{G}$ on joukkoperhe, joka koostuu joukoista $A \subseteq \Omega$, joille pätee että joko A tai A^c sisältää vain äärellisen monta elementtiä (esimerkiksi $A = \{2, 7, 11\} \in \mathcal{G}$ ja $A = \{9, 10, 11, \ldots\} \in \mathcal{G}$).

(a) Osoita, että $\mathcal{G}$ on algebra.

(b) Onko $\mathcal{G}$ myös σ-algebra?

(4) Osoita lauseen 1.1.8 puuttuvat osat: $\sigma(\mathcal{G}_2) = \sigma(\mathcal{G}_4) = \sigma(\mathcal{G}_i)$ jollekin $i \in \{0, 1, 3, 5\}$.

(5) Todista Lause 1.2.6 (6): Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Jos $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ ja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(6) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja joukko $A \in \mathcal{F}$ siten, että $\mathbb{P}(A) > 0$. Osoita, että $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ on todennäköisyysavaruus, missä

$$\mu(B) := \mathbb{P}(B|A).$$

(7) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Jos $A, B \in \mathcal{F}$ ovat riippumattomia, niin osoita, että

(a) A ja B^c ovat riippumattomia,

(b) A^c ja B^c ovat riippumattomia.