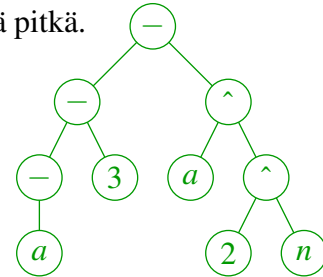


Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille (ei kysymyspaperille). Kannattaa näyttää välivaiheita tai perusteluja, koska ne saattavat pelastaa osan pisteistä jos lopullinen vastaus on väärin. Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Pisteet jakautuvat tasan alakohtiin (a), (b) jne. Kuvia sekä pseudo- ja ohjelmakoodeja lukuun ottamatta pisin opettajan laatima mallivastaus mihinkään kohtaan on enintään 2 riviä pitkä.

1. (ab) Piirrä lausekkeen $-a - 3 - a^{2^n}$ lausekepuu.



(c) Luettele neljä mahdollisimman isoa kaavaan $\forall i; 0 \leq i < n : A[i] = A[n + 1 - i]$ sisältyvää lauseketta.

$$A[n + 1 - i], n + 1 - i, n + 1, A[i]$$

(d) Luettele kaavan $\forall i; 0 \leq i < n : A[i] = A[n + 1 - i]$ vapaat muuttujat ja sidotut muuttujat.

Vapaat: A ja n . Sidotut: i .

Tarkoittakoon N että vuosiluku on jaollinen neljällä, S että se on jaollinen sadalla ja E että se on jaollinen neljälläsadalla. Ilmaise seuraavat logiikan merkinnöillä.

(e) Vuosiluku on jaollinen neljällä mutta ei sadalla, tai vuosiluku on jaollinen neljälläsadalla.

$$N \wedge \neg S \vee E$$

(f) Jos vuosiluku on jaollinen sadalla, niin se on jaollinen neljällä.

$$S \rightarrow N$$

2. Sievennä seuraavat. Näytä jokaiselle ainakin yksi järkevä välivaihe tai muu perustelu.

(a) $\neg(P \vee \neg Q)$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg \neg Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$$

(b) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow \neg P \vee P \vee Q \Leftrightarrow \top$$

(c) $P \Leftrightarrow (P \vee Q)$

$$\Leftrightarrow (P \rightarrow P \vee Q) \wedge (P \vee Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \top \wedge Q \rightarrow P \Leftrightarrow Q \rightarrow P$$

Mitkä seuraavista päättelyaskelista ovat päteviä? Perustele vastauksesi.

(d) $x > 1 \Rightarrow x \geq 3$

Ei. Kun $x = 2$, on vasen puoli tosi mutta oikea puoli ei ole.

(e) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$

Ei. Kun $a = 1$ ja $b = -1$, on $a^2 = b^2$ mutta $a \neq b$.

(f) $0 = 1 \Rightarrow 1 = 3$

Kyllä. Vasen puoli on aina epätosi, joten vastaesimerkkejä ei ole.

3. Tehtävän tavoitteena on ratkaista $2|x + 2| \leq x + 5$ kuten kurssilla on opetettu.

(ab) Kirjoita kaava, joka saadaan kaavasta $2|x + 2| \leq x + 5$ poistamalla $|$ ja $|$ kuten kurssilla on opetettu.

$$x + 2 < 0 \wedge -2(x + 2) \leq x + 5 \vee x + 2 \geq 0 \wedge 2(x + 2) \leq x + 5$$

(c) Ratkaise yksi edellä syntyneistä \vee :n toisistaan erottamista tapauksista. Käytä ratkaisuprosessisi esittämisessä yhtä tai useampaa symboleista $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ ja \Leftarrow .

$$-2(x + 2) \leq x + 5 \Leftrightarrow -3x \leq 9 \Leftrightarrow x \geq -3$$

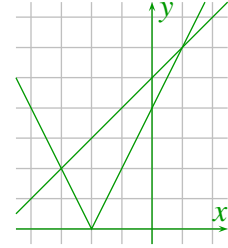
(d) Ratkaise loput edellä syntyneistä \vee :n toisistaan erottamista tapauksista. Käytä ratkaisuprosessisi esittämisessä yhtä tai useampaa symboleista $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ ja \Leftarrow .

$$2(x + 2) \leq x + 5 \Leftrightarrow x \leq 1$$

(e) Kirjoita loput ratkaisuprosessista ja lopullinen vastaus.

$$x < -2 \wedge x \geq -3 \vee x \geq -2 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x < -2 \vee -2 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

- (f) Piirrä x - y -koordinaatisto ja sinne funktioiden $2|x+2|$ ja $x+5$ kuvaajat. Valitse pienimmät ja suurimmat näytettävät koordinaatit siten, että kuvastasi näkyy, että edellä antamasi lopullinen vastaus on oikein.



4. (a) Kirjoita positiivisten kokonaislukujen jakoyhtälö käyttäen merkintöjä div ja mod .

$$n = m(n \text{ div } m) + n \text{ mod } m \text{ ja } 0 \leq n \text{ mod } m < m$$

- (b) Karkausvuodessa on 366 vuorokautta ja muussa vuodessa on 365 vuorokautta. Vuosi on karkausvuosi, jos ja vain jos vuosiluku on jaollinen neljällä mutta ei sadalla, tai vuosiluku on jaollinen neljälläsadalla. Karkausvuoden ylimääräinen päivä on 29.2. Tänäpäivänä on keskiviikko 25.10.2023. Minä vuonna on seuraavan kerran keskiviikko 25.10.?

2028. Lähivuosina 25.10. on: 2023 ke, 2024 pe, 2025 la, 2026 su, 2027 ma, 2028 ke

- (c) Minä vuonna on seuraavan kerran tiistai 25.10.?

2033. Jatkuu: 2029 to, 2030 pe, 2031 la, 2032 ma, 2033 ti

Kirjoita BNF-määritelmät seuraaville kielille. Muuttujat n ja m saavat arvonsa luonnollisista luvuista $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Saat olettaa (e)-kohdassa että (d)-kohdan kieli D on jo määritelty, ja (f)-kohdassa että D ja E on jo määritelty.

- (d) $D = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a :ta ja sen jälkeen sama määrä b :tä.

$$D ::= \varepsilon \mid aDb$$

- (e) $E = \{a^n b^m \mid n > m\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a :ta ja sen jälkeen vähemmän b :tä.

$$E ::= aD \mid aE$$

- (f) $F = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a :ta ja sen jälkeen eri määrä b :tä.

$$F ::= E \mid G \quad G ::= Db \mid Gb$$

5. Ehdokkaiden äänimäärät ensimmäisellä kierroksella ovat taulukossa $A[0 \dots n-1]$. Jos joku ehdokkaista sai yli puolet äänistä, hänestä tulee presidentti. Muussa tapauksessa käydään toinen kierros. Ehdokas pääsee sille jos ja vain jos enintään yksi ehdokas sai enemmän ääniä kuin hän. Kirjoita seuraavat kaavat tai algoritmit. Saat luottaa siihen, että ehdokkaita oli ainakin kaksi. Käytä merkintää $\sum_{i=a}^y A[i]$ tarkoittamaan ehdokkaiden $a, a+1, \dots, y$ yhteensä saamaa äänimäärää. Saat käyttää minkä tahansa kohdan oikeaa vastausta osana minkä tahansa muun kohdan vastaustasi kirjoittamalla (a), (b) jne.

- (a) Jokainen ehdokas sai ainakin 9 ääntä.

$$\forall e; 0 \leq e < n : A[e] \geq 9$$

- (b) Ehdokas e sai yli puolet äänistä.

$$A[e] > \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} A[i]$$

- (c) Toista kierrosta ei järjestetä.

$$\exists e; 0 \leq e < n : (b)$$

- (d) Ehdokas e pääsee toiselle kierrokselle.

$$\neg(c) \wedge 0 \leq e < n \wedge \neg \exists i : \exists j; 0 \leq i < j < n : A[i] > A[e] \wedge A[j] > A[e]$$

- (e) Kirjoita lineaarinen (\approx nopea) algoritmi, joka etsii kaksi suurinta äänimäärää muuttujiin n_1 ja n_2 . Jos useampi kuin yksi saa suurimman äänimäärän, niin n_1 ja n_2 saavat saman arvon. Esimerkiksi jos A on $[3, 5, 2, 1, 5, 3]$, niin $n_1 == 5$ ja $n_2 == 5$.

```
int n1 = 0, n2 = 0;
for( int i = 0; i < n; ++i ){
    if( A[i] > n1 ){ n2 = n1; n1 = A[i]; }
    else if( A[i] > n2 ){ n2 = A[i]; }
}
```

- (f) Kirjoita lineaarinen (\approx nopea) algoritmi, joka tulostaa toiselle kierrokselle pääsevien ehdokkaiden numerot. Saat luottaa siihen, että toinen kierros tarvitaan.

(a)

```
for( int i = 0; i < n; ++i ){
    if( A[i] >= n2 ){ std::cout << ' ' << i; }
}
std::cout << '\n';
```

loppu