Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille. Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Pisteet jakautuvat tasan alakohtiin (a), (b) jne., ellei toisin sanota.

1. (a) Piirrä lausekkeen $\frac{|x|+3x+2}{x+1}$ lausekepuu.

   (b) Ratkaise $\frac{|x|+3x+2}{x+1} < 3$. Näytä ainakin kaksi järkevää välivaihetta.
   $x < 1 \land x \neq -1$ tai $x < -1 \lor -1 < x < 1$

   (c) Nolla astetta Celsiusta on sama lämpötila kuin 32 astetta Fahrenheitia. -40 astetta Celsiusta on sama lämpötila kuin -40 astetta Fahrenheitia. Näiden lämpötila-asteikkojen välinen yhteys on muotoa $C = aF + b$. Johda vakioiden a ja b arvot muodostamalla yhtälöryhmä ja ratkaisemalla se.
   $0 = 32a + b \land -40 = -40a + b \Leftrightarrow a = \frac{5}{9} \land b = -\frac{160}{9}$

2. Tarkoittakoon J että Jyväskylä on hyvä kaupunki, K että Kuopio on hyvä kaupunki ja V että Vaasa on hyvä kaupunki. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

   (a1) Jyväskylä, Vaasa ja Kuopio ovat hyviä kaupunkeja.
   $J \land V \land K$

   (a2) Ainakin yksi näistä kolmesta kaupungista on hyvä.
   $J \lor V \lor K$

   (a3) Jos Kuopio on huono, niin Jyväskylä ei ole huono.
   $\neg K \rightarrow J$

   (a4) Kuopio ja Vaasa ovat samanarvoisia (ts. molemmat hyviä tai molemmat huonoja).
   $K \leftrightarrow V$

   Sievennä seuraavat kaavat mahdollisimman lyhyeen muotoon, jossa ei esiinny $\rightarrow$ eikä $\leftrightarrow$.

   (b) $(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R) \land (R \rightarrow P)$
   $P \land Q \land R \lor \neg(P \lor Q \lor R)$

   (c) $n \leq 3 \land m > 7 \lor \neg(m < n \lor n = m)$
   $n < m$

3. Kirjoita BNF-määritelmät seuraaville kielille. Muuttujat n ja m saavat arvonsa luonnollisista luvuista $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

   (a) $A = \{a^n b^n \mid \} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a:ta ja sen jälkeen sama määrä b:tä.
   $A ::= \varepsilon \mid aAb$

   (b) $B = \{a^n b^m \mid n > m\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a:ta ja sen jälkeen vähemmän b:tä.
   $B ::= aA \mid aB$

   (c) $C = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a:ta ja sen jälkeen eri määrä b:tä.
   $C ::= B \mid D \quad D ::= Ab \mid Db$

4. Taulukko A indeksoidaan $1, \ldots, n$.

   (a) Anna esimerkki taulukosta jolle pätee $\forall i; 1 \leq i < n : \exists j; 1 \leq j \leq n : A[j] < A[i]$ ja anna esimerkki taulukosta jolle se ei päde. Perustele kumpikin esimerkki lyhyesti.
   Tyhjä taulukko toteuttaa, koska $\forall$ toteutuu triviaalisti. $[1, 1]$ ei toteuta, koska $A[1]$:stä pienempää ei A:ssa ole.

(b) Kirjoita kaava, joka sanoo että A:n kaikki alkiot ovat keskenään erisuuret.
$\forall i : \forall j; 1 \leq i < j \leq n : A[i] \neq A[j]$

(c) Kirjoita kaava, joka sanoo että i on laillinen indeksi, ja siinä oleva alkio on vähintään yhtä suuri kuin ainakin yksi sitä edeltävä alkio.
$1 \leq i \leq n \wedge \exists j; 1 \leq j < i : A[i] \geq A[j]$

5. Oletetaan, että $n \in \mathbb{N}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan oheista ohjelmaa.

```
1  r := n
2  q := 0
3  while r ≥ m do
4      r := r − m
5      q := q + 1
```

(a) Aina rivin 3 alussa pätee $n = \ldots$, missä $\ldots$ ei sisällä n:ää (mutta saa sisältää m, q ja/tai r). Kirjoita $\ldots$ ja perustele, että se pätee aina rivin 3 alussa.
$n = qm + r$ Eka kerralla se pätee, koska $r = n$ ja $q = 0$. Rivin 4 lopussa $n = qm + r + m$ ja rivin 5 lopussa jälleen $n = qm + r$.

(b) Anna välttämätön ja riittävä syötettä koskeva ehto sille, että ohjelma lopettaa. Perustele, että jos ehto pätee niin ohjelma lopettaa, ja jos ehto ei päde niin ohjelma ei lopeta.
$m > 0$ Jos $m > 0$, niin r pienenee joka kierroksella, kunnes lopulta $r < m$ jolloin ohjelma lopettaa. Muutoin $m = 0$ (koska $m \in \mathbb{N}$), joten r ja m eivät muutu. Lisäksi $r = n \geq 0$, joten ehto $r \geq m$ ei koskaan rikkoudu.

(c) Minkä tutun asian ohjelma laskee? Millä välillä r on ohjelman lopetettua?
$q = n \operatorname{div} m$ ja $r = n \bmod m$. Lopussa $0 \leq r < m$.

loppu