T. Kärkkäinen
Kurssi: Sovellusohjelmointi Matlab-ympäristössä 2000

Harjoitus 2

Näissä harjoituksissa harjoitellaan matriisien käsittelyä.

Tehtävä 1

Matriiseja voidaan syöttää MATLABiin komponentti kerrallaan tai niitä voidaan luoda ja alustaa esim. komentojen `zeros, eye, rand, randn` avulla. Tutustu aluksi näihin komentoihin. Luo sitten viisi erilaista $\mathbf{R}^{4\times 4}$ *satunnaismatriisi*paria $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ja tutki näiden avulla kaavojen

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \quad (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$$

paikkansapitävyyttä.

Määritellään seuraavat matriisit:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä 2

Laske MATLABin komennon `eig` avulla matriisien $\mathbf{A}_i,\ i = 1, \ldots, 5$, ominaisarvot ja -vektorit. Kuten luennolla todettiin, näille pätee aina $\mathbf{AU} = \mathbf{UD}$. Tarkista sitten päteekö diagonalisointikaava $\mathbf{U}^T\mathbf{AU} = \mathbf{D}$. Jos ei, niin miksei?

Piirrä `quiver`-komennon avulla alkuperäisen koordinaatiston $\mathbf{R}^2$ luonnolliset kantavektorit $(\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T) = \{(1,0), (0,1)\}$ sekä niitä vastaavat muunnetut vektorit $\mathbf{U}^T\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{U}^T\mathbf{e}_2$.

Tehtävä 3

Käytä komentoa `meshgrid` luodaksesi 2-ulotteisen pisteistön (hilan) piirtoalueeseen $[-4, 4] \times [-4, 4]$. Piirrä komentojen `mesh` ja `contour` avulla matriiseja $\mathbf{A}_i$ vastaavien kvadraattisten muotojen $\mathbf{x}^T\mathbf{A}_i\mathbf{x}$ kuvaajat määrittelemässäsi hilassa. Näissä operaatioissa komennot `size` ja `reshape` lienevät hyödyllisiä. Yritä (myös) laskea kvadraattisen muodon arvot hilapisteissä *käyttämättä* `for`-looppia (operaattorin `.*` ja komennon `sum` käyttöharjoitusta). Lisää `contour`illa piirrettyihin kuviin vektorit $\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_1$ ja $\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_2$. Mitä huomaat?
Piirrä myös matriisien $\mathbf{A}_1$ ja $\mathbf{A}_2$ neliöjuurimatriisiin $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ liittyvät vastaavat kuvat.

Tehtävä 4

Määritellään matriisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Laske matriisin $\mathbf{B}$ singulaariarvohajotelma. Tarkista, että hajotelmalle pätevät sen määrittävät kaavat. Kuten luennolla todettiin, singulaariarvohajotelma perustuu ominaisarvotehtävän $\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ratkaisemiseen. Selvitä esimerkkimatriisin avulla, mikä on tämän tehtävän yhteys singulaariarvohajotelmaan ja erityisesti MATLABin sisältämään ns. "`economy size`" versioon (vihje: $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ voidaan jollakin "korkeamman tulkinnan tasolla" mieltää matriisin $\mathbf{B}$ "yleistetyksi" neliöksi $\widehat{\mathbf{B}}^2$).