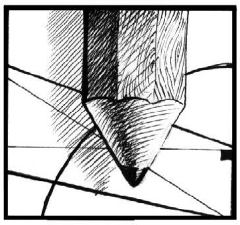


Ihmisen uudet silmät – käänteisten ongelmien matematiikkaa

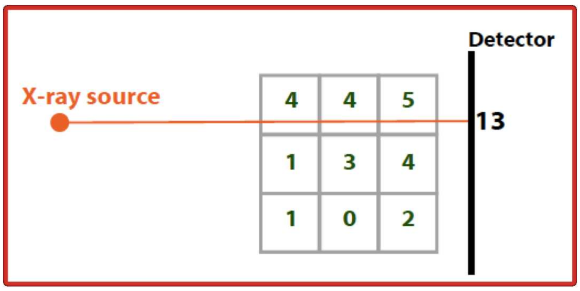
Mikko Salo
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto ja Jyväskylän yliopisto

(Teksti on kooste kirjoittajan Helsingin yliopiston alumni-illassa 17.3.2011 pitämästä esitelmästä.)

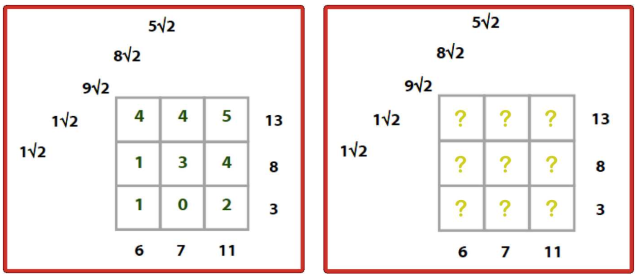
Näköaisti on ihmisen tärkeimpiä aisteja. Silmien avulla ihmiset pystyvät tehokkaasti muodostamaan kolmiulotteisen kuvan ympäröivästä maailmasta. On kuitenkin monia tilanteita, joissa näköaisti tai muutkaan ihmisen aistit eivät pysty tuottamaan tarkkaa tietoa kiinnostavista kohteista. Tällöin voidaan ottaa käyttöön apuvälineitä, kuten mikroskooppi tai kaukoputki, jotka muodostavat kuvia ihmissilmälle liian pienistä tai kaukaisista kappaleista. Näillä optisilla välineilläkin on rajoitteensa: niillä ei esimerkiksi pysty näkemään kiinteiden kappaleiden, kuten ihmiskehon tai maapallon, sisälle. Erilaisten epäsuorien mittausten yhdistäminen matemaattisiin kuvanmuodostusmenetelmiin voi tuottaa huomattavasti parempia tuloksia. Tässä kirjoituksessa ”ihmisen uusilla silmillä” tarkoitetaan matematiikkaan ja erilaisiin fysikaalisiin ilmiöihin perustuvia tehokkaita kuvantamismenetelmiä, joilla ihminen pystyy laajentamaan näkökykyään – näkemään pienempiä tai suurempia asioita kuin mihin paljas silmä pystyy, ja myös näkemään esineiden sisälle avaamatta niitä.

Aloitetaan esimerkillä, joka on useimmille tuttu. Röntgenkuvaus eri muodoissaan on tärkeä ja yleinen diagnostinen toimenpide nykyaikaisessa lääketieteessä, ja menetelmä on jokapäiväisessä käytössä myös lentomatkustamisen yhteydessä suoritettavassa käsimatkatavaroiden läpivalaisussa. Tietokonetomografiakuvaus, eli amerikkalaisista sairaalasarjoista tuttu ”CAT scan”, pystyy tuottamaan huomattavan tarkkoja kuvia esimerkiksi aivojen rakenteesta ilman pääkalloa avaavaa leikkausta.

Minkälaista matematiikkaa tietokonetomografiaan liittyy? Röntgensäteet koostuvat korkeaenergisistä fotoneista, jotka kulkevat ihmisen läpi oleellisesti suoria viivoja pitkin. Ihmisen eri kudokset vastustavat säteen kulkua tavalla, jota kuvataan attenuaatiokertoimilla. Röntgensäteiden avulla voidaan mitata attenuaatiokertoimien summia eri suoria pitkin (kuva 1). Kuvassa 2a on merkitty neliönmuotoisen kuvattavan kappaleen attenuaatiokertoimien vaakasuorat summat, pystysuorat summat ja lävistäjän suuntaiset summat.



Kuva 1. Röntgensäteet mittaavat attenuaatiokertoimien summia suoria pitkin. (Kuvat 1 ja 2a, 2b: Samuli Siltanen.)



Kuva 2. Tietokonetomografian (a) suora ongelma: määritä attenuaatiosummat, kun kertoimet tunnetaan, ja (b) käänteinen ongelma: määritä attenuaatiokertoimet, kun summat tunnetaan.

Tietokonetomografian suora ongelma on: jos kudos eli attenuaatiokertoimet tunnetaan, mitkä ovat summat suorien yli? Tämä ei ole vaikea ongelma. Käytännössä huomattavasti kiinnostavampi on käänteinen ongelma eli inversio-ongelma: jos tunnetaan röntgenmittaukset suorien yli, miten muodostetaan kuva kudoksesta? Eli jos tunnetaan attenuaatiosummat suorien yli, mitkä olivat alkuperäiset attenuaatiokertoimet (kuva 2b)?

Yllä esitetty röntgenkuvauksen inversio-ongelma on klassinen matemaattinen ongelma, jonka oleellisesti ratkaisi Johann Radon jo vuonna 1917. Ongelman jatkuvassa muotoilussa attenuaatiokertoimia kuvaa tasossa määritelty riittävän säännöllinen reaaliarvoinen funktio f. Inversio-ongelman matemaattinen muotoilu on: jos tunnetaan funktion f integraalit eli jatkuvat summat kaikkien tason suorien yli, voidaanko näistä määrätä funktio f? Matemaattiseen esitykseen kuuluu aina vähintään yksi kaava, ja seuraavassa annetaan ilman tarkempia perusteluja tämän tekstin ainoat kaavat (lisätietoa löytyy esimerkiksi kirjasta [1]). Jos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on riittävän säännöllinen funktio, sen Radon-muunnos on funktio

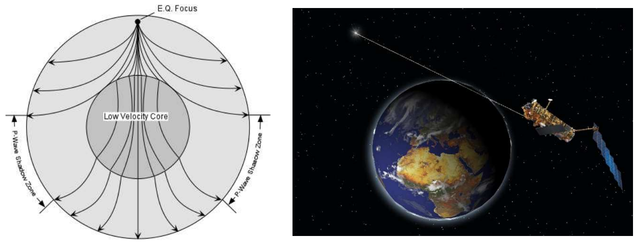
$$Rf(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega_\alpha + t\omega_\alpha^\perp)\,dt, \qquad s \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Tässä $\omega_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ ja $\omega_\alpha^\perp = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$. Radon-muunnos parametrien s ja α eri arvoilla esittää funktion f integraalit tason suorien yli. Seuraava Radonin käänteiskaava kertoo, miten alkuperäinen funktio f määrätään Radon-muunnoksesta:

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{s} \partial_s Rf(x \cdot \omega_\alpha + s, \alpha)\, d\alpha\, ds.$$

Tämän kaavan ja sen erilaisten diskreettien versioiden avulla pystytään siis muodostamaan kuvia kudoksesta, kun röntgenmittaukset tunnetaan.

Radon tutki ylläolevaa ongelmaa puhtaasta tieteellisestä mielenkiinnosta ajattelematta käytännön sovelluksia. Hyvä esimerkki vapaan tutkimuksen hyödyllisyydestä on se, että 1970-luvulla, jolloin teknologia oli riittävän kehittyneellä tasolla, Allan Cormack ja Godfrey



Kuva 3. (a) Maanjäristyksen aiheuttamien ääniaaltojen eteneminen maapallon läpi (kuva: Stephen A. Nelson, Tulane University), (b) GOMOS-instrumentti (kuva: Ilmatieteen laitos).

Hounsfield kehittivät samaan matematiikkaan perustuvan tietokonetomografiaskannerin. Tietokonetomografia auttaa nykyään miljoonia ihmisiä sairausten diagnosoinnissa, ja Cormack ja Hounsfield saivat työstään Nobelin lääketieteen palkinnon vuonna 1979. Tässä yhteydessä mainitaan toisinaan eräs yksityiskohta: Hounsfield työskenteli EMI -yhtiössä, joka on nykyäänkin toiminnassa oleva levy-yhtiö. EMI oli 1970-luvulla huomattavan varakas yhtiö, mihin vaikuttivat osaltaan The Beatlesin levyistä saadut valtavat myyntitulot. Tällä tavalla The Beatles epäsuorasti tuki EMI:n elektroniikkaosaston toimintaa ja mahdollisti Hounsfieldin pitkäjänteisen skannerin kehittämistyön!

Radon-muunnoksen matematiikka toimii lääketieteellisen kuvantamisen lisäksi monessa muussakin tilanteessa. Sen avulla voidaan kuvantaa hyvin pieniä asioita, kuten viruksia (esimerkiksi HI-virus) elektronimikroskoopilla. Tässä sovelluksessa röntgensäteet korvataan elektronisuihkuilla, mutta kuvantamisen matematiikka on hyvin samanlaista. Virusten kuvantamiseen liittyy kuitenkin yksi erityispiirre: virukset ovat hyvin pieniä, ja monesti on vaikea tietää tarkasti, mistä suunnista mittaukset on saatu. Kuvan muodostaminen on mahdollista myös tässä tuntemattomien suuntien tapauksessa, ja tilanteen matemaattinen analyysi hyödyntää algebrallisen geometrian menetelmiä.

Siirrytään hyvin pienistä esineistä suuremman mittakaavan asioihin. Kuten tiedämme, Japanissa tapahtui 11.3.2011 tuhoisa maanjäristys. Järistykset aiheuttavat suurta vahinkoa ja inhimillistä kärsimystä, mutta toisaalta niiden avulla saadaan tietoa maapallon rakenteesta. Seismisissä kuvantamismenetelmissä käytetään maanjäristysten aiheuttamia ääniaaltoja, jotka kulkevat maapallon läpi ja sisältävät informaatiota planeettamme syvästä rakenteesta. Ääniaallot eivät yleensä etene suoria viivoja pitkin (kuva 3a), ja tämän vuoksi seismisessä kuvantamisessa esiintyvien Radon-muunnosten matemaattinen analyysi on usein haastavampaa kuin röntgenkuvauksen vastaavissa ongelmissa.

Radon-muunnoksen matematiikkaa voidaan käyttää vieläkin suuremmissa skaaloissa, kuten avaruustutkimuksessa. Euroopan avaruusjärjestön ESA:n tutkimuskalustoon kuuluu Envisat-satelliitti, jossa on mukana suomalaistenkin kehittämä ilmakehän otsonimääriä mittaava GOMOS-instrumentti. GOMOS mittaa tähtien valon kirkkautta. Tähdet säteilevät valoa, ja kun valo kulkee ilmakehän läpi, niin ilmakehän kaasut, kuten otsoni, vastustavat valon kulkua samalla tavalla kuin ihmiskudos vastustaa röntgensäteiden kulkua. Mittaustuloksena saadaan jälleen kerran integraaleja suorien yli (kuva 3b). Radon-muunnos esiintyy siis tässäkin ongelmassa, jossa eräänä erityispiirteenä ovat suuret mittausmäärät, joiden käsittelyssä käytetään hyväksi tilastollisia menetelmiä.

Tässä kirjoituksessa on esitelty useita tilanteita, joissa Radon-muunnoksen matematiikka luo ihmiselle uudet silmät. Näillä silmillä pystytään havaitsemaan asioita, joita paljas silmä ei erota. Voi tuntua yllättävältä, että samantyyppiset matemaattiset menetelmät toimivat näin monessa erilaisessa sovelluksessa; tämä kuvastaa hyvin matematiikan universaalia luonnetta ja ”käsittämätöntä toimivuutta” (*unreasonable effectiveness of mathematics*, kuten fyysikko Eugene Wigner asian muotoili [2]).

Viitteet

[1] F. Natterer, The mathematics of computerized tomography. John Wiley & Sons Inc, 1986.

[2] E.P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 1–14.