Rungen lause ja sovelluksia inversio-ongelmiin

Mikko Salo

1 Johdanto

Inversio-ongelmat eli käänteiset ongelmat liittyvät usein kuvantamisongelmiin, joissa tuntemattoman kappaleen sisältä pyritään saamaan tietoa kappaleen reunalla tai ulkopuolella tehtävien mittauksien avulla. Tuttuja esimerkkejä tällaisista kuvantamisongelmista ovat mm. röntgentomografia ja ultraäänikuvaus.

Kuvantamisongelmia voidaan analysoida matemaattisilla malleilla, joiden tutkimus on inversio-ongelmien matemaattisen teorian keskiössä. Seuraavassa on kolme esimerkkiä kysymyksistä, jotka ovat olleet tärkeitä tässä teoriassa:

1. **Calderónin ongelma**: voidaanko potilaan sisältä tuottaa kuvia tekemällä sähköisiä mittauksia iholla?
2. **Gel'fandin ongelma**: voidaanko kappaleen rakenne selvittää lähettämällä ääniaaltoja kappaleen pinnalta ja mittaamalla sironneita aaltoja?
3. **Matka-aikatomografia**: voidaanko maapallon ytimen rakenne selvittää, jos tunnetaan maanjäristysten kulkuajat maapallon läpi?

Matemaattisesti ylläolevia ongelmia voidaan mallintaa seuraavien osittaisdifferentiaaliyhtälöiden avulla:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(c(x)\nabla u) &= 0 \qquad &&\text{(johtavuusyhtälö)}\\
\partial_t^2 u - c(x)^2 \Delta u &= 0 \qquad &&\text{(aaltoyhtälö)}\\
X_c u &= 0 \qquad &&\text{(kuljetusyhtälö)}
\end{aligned}
$$

Tässä $c(x)$ on positiivinen funktio, joka kuvaa eri kudosten sähkönjohtavuutta tai aaltojen nopeutta kappaleen sisällä, ja X_c on *geodeettinen vektorikenttä*, joka mittaa muutosta äänennopeuteen $c(x)$ liittyviä geodeesikäyriä pitkin.

Kaikissa näissä kuvantamisongelmissa voidaan hallita tai mitata ratkaisujen u arvoja kappaleen reunalla, ja näistä mittauksista on pyrittävä saamaan tietoa tuntemattomasta funktiosta c kappaleen sisällä. On huomattava, että ylläolevat yhtälöt ovat varsin erityyppisiä. Differentiaaliyhtälöiden luokittelussa johtavuusyhtälö on *elliptinen* (ei sisällä aikaparametria, ratkaisut ovat yleensä säännöllisiä), aaltoyhtälö on *hyperbolinen* (sisältää aikaparametrin, ratkaisut koostuvat äärellisellä nopeudella etenevistä aaltopaketeista eivätkä ole välttämättä säännöllisiä), ja kuljetusyhtälö on ensimmäistä kertalukua.

Eräs luonnollinen ajatus kuvantamisongelmien ratkaisemiseksi on, että pyrittäisiin käyttämään erityisiä reuna-arvoja, joita vastaavat ratkaisut u sisältäisivät paljon informaatiota tuntemattomasta funktiosta $c(x)$ kappaleen sisällä. Tämä ajatus herättää seuraavanlaisia kysymyksiä:

- Miltä ylläolevien yhtälöiden ratkaisut voivat yleensä ottaen näyttää?
- Voidaanko tuottaa ratkaisuja, jotka fokusoituvat jonkin sisäpisteen tai pinnan läheisyyteen?
- Voidaanko tuottaa ratkaisuja, joiden kokoa tai profiilia kappaleen eri kohdissa voidaan muokata halutunlaiseksi?

Osoittautuu, että ratkaisujen muotoa voidaan tietyissä tapauksissa hallita yhtälön asettamien rajoitteiden puitteissa. Avainsanoja ovat ratkaisujen *approksimaatio-ominaisuudet*, *kontrolloitavuus* ja *singulariteettien eteneminen*. Elliptisten yhtälöiden, kuten johtavuusyhtälön, ratkaisujen approksimoinnin varhaisia tuloksia on kompleksifunktioiden teoriassa esiintyvä Rungen lause (1885).

Ratkaisujen approksimaatio-ominaisuuksia on käytetty inversio-ongelmien matemaattisen teorian eri osa-alueilla. Viime aikoina on huomattu, että varsin erilaisten yhtälöiden käsittelystä löytyy yllättäviä yhteisiä piirteitä. ERC Consolidator Grant -projektissani (2018–2022) tutkitaan matemaattisten inversio-ongelmien yhtenäisteorian mahdollisuutta, ja ratkaisujen approksimointi muodostaa yhden (pienen) osan projektista.

Tämä teksti on johdatus elliptisten yhtälöiden ratkaisujen approksimaatio-ominaisuuksiin klassisten esimerkkien kautta. Kappaleessa 2 esitellään Rungen approksimaatiolause kompleksitason analyyttisten funktioiden tapauksessa. Kappale 3 puolestaan käsittelee harmonisten funktioiden approksimointia, ja esittelee todistuksissa käytettäviä menetelmiä. Kappaleessa 4 esitellään joitain aihepiirin viimeaikaisia sovelluksia inversio-ongelmien tutkimuksessa.

2 Rungen lause

Kerrataan lyhyesti asiaan liittyviä kompleksianalyysin käsitteitä (seuraavat asiat löytyvät esimerkiksi oppikirjasta [10]). Jos $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin joukko, sanotaan, että funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on *analyyttinen* joukossa Ω, jos kaikille $z_0 \in \Omega$ kompleksinen raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa. Toinen yhtäpitävä määritelmä voidaan antaa potenssisarjojen avulla: funktio $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on analyyttinen jos ja vain jos jokaisessa avoimessa kiekossa $B(z_0, r) \subset \Omega$ funktio f voidaan esittää potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \qquad z \in B(z_0, r),$$

joka suppenee tasaisesti jokaisessa suljetussa kiekossa $\overline{B(z_0, \rho)}$ kun $\rho < r$.

Ylläolevasta ehdosta seuraa, että jokainen analyyttinen funktio voidaan esittää kompleksisten polynomien

$$P(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j (z - z_0)^j$$

tasaisena raja-arvona, ainakin jokaisessa alueeseen Ω sisältyvässä suljetussa kiekossa. Kompleksiset polynomit toimivat siis rakennusosina, joista analyyttisiä funktioita voidaan muodostaa. On luonnollista kysyä, voidaanko analyyttiset funktiot esittää polynomien raja-arvoina myös suuremmissa joukoissa tai mahdollisesti koko alueessa Ω. Eräs klassinen vastaus tähän kysymykseen saadaan seuraavasta lauseesta (ns. *Rungen approksimaatiolause*):

Lause 1 (Runge 1885)**.** Olkoon f analyyttinen funktio avoimessa joukossa Ω, $K \subset \Omega$ kompakti joukko, ja $\mathbb{C} \setminus K$ yhtenäinen. Tällöin on olemassa jono $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ kompleksisia polynomeja, siten että $P_j \to f$ tasaisesti joukossa K.

Rungen approksimaatiolauseesta esiintyy monia eri muotoja. Eräs vahvempi muoto on *Mergelyanin lause* (1951): jos $K \subset \mathbb{C}$ on kompakti joukko, $\mathbb{C} \setminus K$ on yhtenäinen, ja $f : K \to \mathbb{C}$ on jatkuva funktio, joka on analyyttinen joukon K sisuksessa $\mathrm{int}(K)$, niin tällöin funktiota f voidaan approksimoida polynomeilla tasaisesti joukossa K.

Tulkitaan seuraavaksi Rungen lause hieman uudella tavalla. Analyyttiset funktiot voidaan määritellä myös *Cauchy-Riemannin yhtälöiden* avulla: jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, jos $f = u + iv$ missä u ja v ovat funktion f reaali- ja imaginääriosat, ja jos $z = (x, y)$, niin tällöin u ja v toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt joukossa Ω:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Yhtälöt voidaan esittää kompaktisti määrittelemällä kompleksiset (Wirtingerin) derivaatat

$$\begin{aligned} \overline{\partial} f &= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f), \\ \partial f &= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f). \end{aligned}$$

Nyt Cauchy-Riemannin yhtälöt voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$\overline{\partial} f = 0 \quad \text{joukossa } \Omega.$$

Kääntäen, jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on jatkuvasti derivoituva funktio ja $\overline{\partial} f = 0$ joukossa Ω, niin tällöin f on analyyttinen joukossa Ω. (Ehto, että f on jatkuvasti derivoituva, voidaan poistaa käyttämällä sopivaa derivaatan heikkoa määritelmää.)

Huomataan seuraavaksi, että jokainen kompleksinen polynomi P toteuttaa yhtälön $\overline{\partial} P = 0$ koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$ (ts. P on *kokonainen funktio*). Lisäksi Liouvillen lauseen eräs muotoilu sanoo, että jokainen kokonainen funktio f, jolle $|f(z)| \leq C|z|^N$ jollekin N, on kompleksinen polynomi. Ylläolevasta Rungen lauseesta saadaan nyt seuraava muotoilu:

Lause 2. Olkoon f yhtälön $\overline{\partial} f = 0$ ratkaisu joukossa Ω, olkoon $K \subset \Omega$ kompakti, ja olkoon $\mathbb{C} \setminus K$ yhtenäinen. Tällöin löytyy jono $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ yhtälön $\overline{\partial} f_j = 0$ ratkaisuja koko kompleksitasossa, siten että $f_j \to f$ tasaisesti joukossa K.

Rungen lause voidaan siis tulkita tuloksena, joka kertoo, että *yhtälön* $\overline{\partial} f = 0$ *ratkaisuja pienemmässä alueessa voidaan approksimoida ratkaisuilla suuremmassa alueessa.* On tunnettua, että alueen Ω analyyttistä funktiota ei voida välttämättä jatkaa analyyttiseksi funktioksi mihinkään joukkoa Ω suurempaan alueeseen (riittää konstruoida analyyttinen funktio, jonka nollakohdat kasautuvat jokaiseen reunan $\partial\Omega$ pisteeseen). Kuitenkin Rungen lauseen mukaan löytyy koko kompleksitason analyyttisiä funktioita, joiden profiilit muistuttavat mielivaltaisen tarkasti annetun analyyttisen funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ profiilia kompaktissa joukossa.

3 Harmonisten funktioiden approksimointi

Siirrytään seuraavaksi kompleksitason analyyttisistä funktioista euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ harmonisiin funktioihin (hyvä viite on esimerkiksi [3]). Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin yhtenäinen joukko ja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ on riittävän säännöllinen funktio (esimerkiksi kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva reunalle asti), *Laplace-operaattori* määritellään kaavalla

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Funktiota u sanotaan *harmoniseksi* jos se toteuttaa *Laplace-yhtälön*

$$\Delta u = 0.$$

Laplace-yhtälö on tärkeimpiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, ja harmoninen funktio u voi kuvata esimerkiksi tasapainotilassa olevaa sähköistä jännitepotentiaalia tai lämpöjakaumaa.

On luonnollista kysyä: miltä harmoniset funktiot (eli tasapainotilassa olevat potentiaalit) voivat näyttää? Monesti ajatellaan, että harmoniset funktiot ovat varsin *jäykkiä*, sillä niillä on esimerkiksi seuraavia rajoitteita:

- Tapauksessa $n = 1$ Laplace-yhtälö on muotoa $u'' = 0$, ja tämän yhtälön ainoat ratkaisut ovat muotoa $u(x) = ax + b$ joillekin vakioille a ja b.

- Harmoniset funktiot toteuttavat *maksimiperiaatteen*: niillä ei voi olla paikallisia maksimeja tai minimejä (siis ei myöskään paikallisia oskillaatioita) alueen sisällä.

- Harmonisille funktioille pätee *yksikäsitteisen jatkamisen periaate*: jos u häviää jossain pienessä pallossa, niin välttämättä $u = 0$ koko alueessa Ω.

Osoittautuu kuitenkin, että harmonisille funktioille pätee Rungen lauseen vastine, ja että harmonisten funktioiden muotoa voidaan hallita tietyillä tavoilla (toki kuitenkin ylläolevien rajoitteiden puitteissa). Tämä mahdollistaa esimerkiksi sen, että voidaan löytää harmonisia funktioita, joilla on suuri energia annetussa (pienessä) alueessa U_1, ja jotka ovat hyvin pieniä toisessa annetussa (suuressa) alueessa U_2.

Lause 3 (Lokalisoidut potentiaalit)**.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue, jolla on riittävän säännöllinen reuna. Olkoot $U_1, U_2 \subset \Omega$ avoimia joukkoja, joille pätee

$$\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset,$$
$$\overline{\Omega} \setminus (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) \text{ on yhtenäinen ja sisältää reunan } \partial\Omega \text{ avoimen joukon.}$$

Tällöin jokaiselle $N \geq 1$ löytyy harmoninen funktio u joukossa Ω, jolle pätee

$$u \geq N \text{ joukossa } U_1, \text{ ja } |u| \leq 1/N \text{ joukossa } U_2.$$

Inversio-ongelmien teoriassa ylläolevan lauseen mukaista harmonista funktiota on kutsuttu nimellä *lokalisoitu potentiaali*, ja tällaisten funktioiden eräitä sovelluksia käsitellään viimeisessä luvussa. Lauseen eräs rajoite on, että lokalisoitujen potentiaalien muotoa joukossa $\Omega \setminus (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2)$ ei voida hallita.

Käsitellään tämän kappaleen lopuksi lyhyesti sitä, miten Lause 3 voitaisiin todistaa. Kysymys palautuu seuraavaan Rungen lauseen vastineeseen harmonisille funktioille:

Lause 4 (Rungen lause harmonisille funktioille)**.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue, jolla on säännöllinen reuna, olkoon $U \subset \Omega$ avoin, ja oletetaan, että

$$\overline{\Omega} \setminus \overline{U} \text{ on yhtenäinen ja sisältää reunan } \partial\Omega \text{ avoimen joukon.}$$

Tällöin jokaiselle joukon U riittävän säännölliselle harmoniselle funktiolle u_0 löytyy jono $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ joukon Ω harmonisia funktioita, joille

$$u_j \to u_0 \text{ tasaisesti joukossa } U.$$

Lauseen 3 todistus. Käytetään Lausetta 4 valitsemalla $U = U_1 \cup U_2$ ja valitsemalla
$$u_0(x) = \begin{cases} N+1, & x \in U_1, \\ 0, & x \in U_2. \end{cases}$$

Tällöin paloittain vakio funktio u_0 on harmoninen joukossa U, joten löytyy jono (u_j) joukon Ω harmonisia funktioita, joille $u_j \to u_0$ tasaisesti joukossa U. Nyt riittää valita $u = u_j$, kun j on riittävän suuri. $\square$

Riittää siis todistaa Lause 4. P. Lax ja B. Malgrange huomasivat 1950-luvulla, että Rungen lauseen tapaisia approksimaatiolauseita voi osoittaa palauttamalla kysymys sopivan duaaliongelman yksikäsitteisyyteen, ja käyttämällä *yksikäsitteisen jatkamisen periaatetta*. Hahmotellaan seuraavassa eräs todistus Lauseen 4 L^2-versiolle, jossa osoitetaan, että $u_j \to u_0$ avaruudessa $L^2(U)$:

1. Täytyy osoittaa, että globaalien (ts. joukon Ω) harmonisten funktioiden rajoittumat joukkoon U ovat tiheässä joukon U harmonisten funktioiden avaruudessa. Jokainen riittävän säännöllinen globaali harmoninen funktio on muotoa Pf, missä $u = Pf$ ratkaisee reuna-arvo-ongelman

   $$\Delta u = 0 \text{ joukossa } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = f,$$

   ja missä f on funktion u reuna-arvo. Ratkaisuoperaattori P on jatkuva lineaarinen operaattori sopivilla funktioavaruuksilla, esimerkiksi

   $$P : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega),$$

   missä H^k on ns. L^2-pohjainen Sobolev-avaruus, jonka funktioilla on L^2-mielessä hyvin määritellyt derivaatat kertalukuun k asti.

2. Määritellään $T : H^{1/2}(\partial\Omega) \to L^2(U), \quad f \mapsto Pf|_U$. Rungen lauseen L^2-vastine voidaan nyt muotoilla seuraavasti: osoita, että

   $$\mathrm{Ran}(T) \text{ on tiheä avaruudessa } \ Y = \{v \in L^2(U)\,;\, \Delta v = 0\},$$

   missä $\mathrm{Ran}(T) = T(H^{1/2}(\partial\Omega))$ on operaattorin T kuva-avaruus.

3. On siis osoitettava, että $\mathrm{Ran}(T)$ on tiheä, ts. yhtälö $T(f) = v$ pystytään ratkaisemaan approksimatiivisesti kaikille $v \in Y$. Käytetään lineaarialgebran periaatetta, jonka mukaan yhtälön $T(f) = v$ approksimatiivinen ratkeavuus seuraa yhtälön $T^*(v) = 0$ ratkaisujen yksikäsitteisyydestä.

4. Lyhyt lasku osoittaa, että yhtälöllä $T^*(v) = 0$ on ainoastaan nollaratkaisu $v \in Y$, jos yhtälön

   $$\Delta\varphi = 0 \text{ joukossa } \Omega \setminus \overline{U}, \qquad \varphi|_\Gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_\Gamma = 0$$

   ainoa ratkaisu on $\varphi \equiv 0$. Tässä Γ on reunan $\partial\Omega$ avoin osajoukko, jolle $\Gamma \subset \overline{\Omega} \setminus \overline{U}$, ja $\partial u/\partial\nu$ on normaaliderivaatta.

5. Lopuksi huomataan, että *yksikäsitteisen jatkamisen periaatteen* nojalla edellisessä kohdassa esiintyvän ongelman ainoa ratkaisu on $\varphi \equiv 0$. Laplace-yhtälön tapauksessa tämä seuraa oleellisesti siitä, että harmoniset funktiot ovat reaalianalyyttisiä (yleisemmille elliptisille yhtälöille tarvitaan vahvempia työkaluja, kuten *Carlemanin epäyhtälöitä*).

Ylläoleva hahmotelma, jonka yksityiskohtia löytyy esimerkiksi viitteestä [9], todistaa Rungen lauseen L^2-vastineen. Tasainen suppeneminen voidaan osoittaa käyttämällä eri funktioavaruuksia. Lisätietoja löytyy viitteestä [1].

4 Sovelluksia inversio-ongelmiin

Edellä käsiteltiin elliptisten yhtälöiden ratkaisujen approksimaatio-ominaisuuksia klassisten esimerkkien (analyyttiset ja harmoniset funktiot) tapauksissa. Vastaavia ominaisuuksia on myös yleisemmillä elliptisillä yhtälöillä, kuten sähköisen kuvantamisen taustalla olevassa johtavuusyhtälössä

$$\mathrm{div}(c(x)\nabla u) = 0.$$

Myös johdannossa esiintyneellä aaltoyhtälöllä on omat approksimointiin liittyvät ominaisuutensa. Lisäksi näillä yhtälöillä on erityisiä, tiettyjen käyrien tai pintojen läheisyyteen keskittyviä ratkaisuja, joiden olemassaolo selittyy yhtälöiden singulariteettien etenemisominaisuuksilla.

Käydään lopuksi lyhyesti läpi muutamia viimeaikaisia sovelluksia, joissa yllämainittuja menetelmiä on hyödynnetty kuvantamismenetelmiin liittyvien matemaattisten mallien analysoinnissa:

1. Lauseen 3 mukaisia lokalisoituja potentiaaleja on hyödynnetty eri tavoilla sähköiseen impedanssitomografiaan liittyvän Calderónin ongelman yhteydessä, erityisesti kappaleessa esiintyvien esteiden paikan ja muodon määrittämisessä monotonisuusrelaatioiden avulla [5]. Menetelmä toimii myös positiivisen taajuuden kuvantamisongelmissa [6].

2. Calderónin ongelmassa esiintyvän tuntemattoman johtavuuskertoimen (eikä pelkästään esteiden paikan ja muodon) määrittämisessä on usein hyödynnetty erityisiä eksponentiaalisesti kasvavia ratkaisuja. Nykyään tällaisten ratkaisujen voidaan ymmärtää muodostuvan kaksiulotteisten pintojen läheisyyteen keskittyvistä ratkaisuista, joita elliptisillä yhtälöillä esiintyy tiettyjen geometristen ehtojen vallitessa [11].

3. Viime aikoina on tehty yllättävä havainto, jonka mukaan ns. *fraktionaalisen Laplace-yhtälön*

   $$(-\Delta)^s u = 0 \qquad \text{joukossa } \Omega,$$

   missä $0 < s < 1$, approksimaatio-ominaisuudet ovat paljon paremmat kuin tavallisen Laplace-yhtälön: mitä tahansa funktiota $f \in L^2(\Omega)$ voidaan approksimoida yhtälön $(-\Delta)^s u = 0$ ratkaisuilla [2, 4]. Fraktionaalisten yhtälöiden inversio-ongelmia on pystytty ratkaisemaan monessa tapauksessa tähän ominaisuuteen perustuen [12].

4. Aaltoyhtälöiden inversio-ongelmissa, ja erityisesti johdannossa mainitussa Gel'fandin ongelmassa, ratkaisujen approksimaatio-ominaisuudet ovat olleet merkittävässä osassa mm. reunakontrollimenetelmän yhteydessä [7]. Epälineaaristen aaltoyhtälöiden käänteisiin ongelmiin on myös esitetty uusi menetelmä, jossa epälineaarisuutta hyödynnetään keinotekoisten pistelähteiden ja niitä vastaavia laajenevia palloaaltoja sisältävien ratkaisujen tuottamisessa [8]. Tällä menetelmällä on pystytty myös käsittelemään suhteellisuusteoriaan ja Einsteinin yhtälöihin liittyviä inversio-ongelmia.

Viitteet

[1] F.E. Browder, *Approximation by solutions of partial differential equations*, Amer. J. Math. **84** (1962), 134–160.

[2] S. Dipierro, O. Savin, E. Valdinoci, *All functions are locally s-harmonic up to a small error*, Journal of EMS **19** (2017), 957–966.

[3] L.C. Evans, Partial differential equations. AMS, 1998.

[4] T. Ghosh, M. Salo, G. Uhlmann, *The Calderón problem for the fractional Schrödinger equation*, arXiv:1609.09248.

[5] B. Harrach, M. Ullrich, *Monotonicity-based shape reconstruction in electrical impedance tomography.* SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), 3382–3403.

[6] B. Harrach, V. Pohjola, M. Salo, *Monotonicity and local uniqueness for the Helmholtz equation*, arXiv:1709.08756.

[7] A. Katchalov, Y. Kurylev, M. Lassas, Inverse boundary spectral problems. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **123**, Chapman Hall/CRC, 2001.

[8] Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, *Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations*, Invent. Math. **212** (2018), 781–857.

[9] A. Rüland, M. Salo, *Quantitative Runge approximation and inverse problems*, IMRN (2018), rnx301.

[10] W. Rudin, Real and complex analysis. McGraw-Hill, 1970.

[11] M. Salo, *The Calderón problem and normal forms*, arXiv:1702.02136.

[12] M. Salo, *The fractional Calderón problem*, Journées équations aux dérivées partielles (2017), Exp. No. 7, 8 p.