

Matka maapallon keskipisteeseen – sädemuunnosten matematiikkaa

Mikko Salo

10. joulukuuta 2013

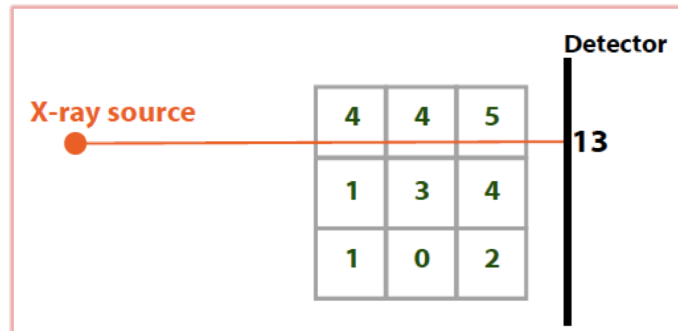
1 Johdanto

Jules Verne kuvaili vuonna 1864 ilmestyneessä science fiction -romaanissaan kolmen tutkimusmatkailijan laskeutumista maapallon syövereihin Islannissa sijaitsevan tulivuoren kraaterin kautta. Vernen visioista monet ovat toteutuneet, mutta maapallon keskipisteessä ihminen ei ole vielä käynyt. Maapallon rakenteesta voidaan kuitenkin saada tietoa epäsuorasti erilaisten mittausten avulla. Tuntemattoman kohteen (kuten maapallon sisuksen) ominaisuuksien määrittäminen epäsuorien mittausten avulla voidaan usein esittää matemaattisena käännteisenä ongelmana eli *inversio-ongelmana*.

Tässä artikkelissa kuvaillaan matemaattisia menetelmiä, joiden avulla esimerkiksi maapallon rakenteesta voidaan yrittää saada tietoa. Tällaisen menetelmien taustalla on usein erilaisia *sädemuunnoksia*, joiden matemaattisessa tulokinnassa analyysi, geometria ja dynaamisten systeemien teoria kohtaavat kiehtovalla tavalla. Aiheen käsittely on hyvä aloittaa esimerkiksi, joka on useimmille tuttu: jos tutkittava kohde on ihminen, niin lääketieteessä tavanomainen keino hankkia tietoa ihmisen sisältä on on läpivalaista ihminen röntgensäteiden avulla.

2 Röntgenkuvaus

Röntgenkuvaus eri muodoissaan on tärkeä ja yleinen diagnostinen toimenpide nykyaikaisessa lääketieteessä, ja menetelmä on jokapäiväisessä käytössä myös lentomatkustamisen yhteydessä suoritettavassa käsimatkatavaroiden läpivalaistuksessa. Tietokonetomografiakuvaus, eli amerikkalaisista sairaalasarjoista tuttu ”CAT scan”, pystyy tuottamaan huomattavan tarkkoja kuvia esimerkiksi aivojen rakenteesta ilman pääkalloa avaavaa leikkausta.

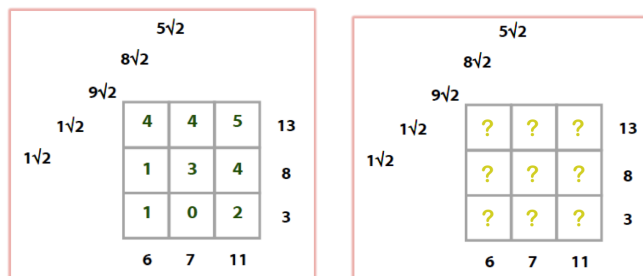


Kuva 1 (Samuli Siltanen): Röntgensäteet mittaavat attenuaatiot summia.

Minkäläistä matematiikkaa tietokonetomografiaan sitten liittyy? Röntgensäteet koostuvat korkeaanergetisistä fotoneista, jotka kulkevat ihmisen läpi oleellisesti suoria viivoja pitkin. Ihmisen eri kudokset absorboivat säteen fotoneja tavalla, jota kuvataan attenuaatiokertoimilla. Röntgensäteiden avulla voidaan mitata attenuaatiokertoimien summia eri suoria pitkin (kuva 1). Kuvassa 2a on merkitty neliönmuotoisen kuvattavan kappaleen attenuaatiokertoimien vaakasuorat summat, pystysuorat summat ja lävistäjän suuntaiset summat.

Tietokonetomografian suora ongelma on: jos kudokset eli attenuaatiokertoimet tunnetaan, mitkä ovat summat suorien yli? Kuten lukija voi todeta, tämä ei ole vaikea ongelma. Käytännössä huomattavasti kiinnostavampi on käänteinen ongelma eli inversio-ongelma: jos tunnetaan röntgenmittaukset suorien yli, miten muodostetaan kuva kudoksesta? Eli jos tunnetaan attenuaatiot summien yli, mitkä olivat alkuperäiset attenuaatiokertoimet (kuva 2b)?

Yllä esitetty röntgenkuvauksen inversio-ongelma on klassinen matemaattinen ongelma, jonka oleellisesti ratkaisi Johann Radon jo vuonna 1917 [10]. Ongelman jatkuvassa muotoilussa attenuaatiokertoimia kuvaa tasossa määritelty riittävän säännöllinen reaaliarvoinen funktio f . Inversio-ongelman matemaattinen muotoilu on: jos tunnetaan funktion f integraalit eli jatkuvat summat kaikkien tason suorien yli, voidaanko näistä määrätä funktio f ?



Kuvat 2a, 2b (Samuli Siltanen): Tietokonetomografian suora ja käänteinen ongelma.

Kaavoina ylläoleva kysymys esitetään seuraavasti: jos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on riittävän säännöllinen funktio, sen Radon-muunnos on funktio

$$Rf(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega_\alpha + t\omega_\alpha^\perp) dt, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Tässä $\omega_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ ja $\omega_\alpha^\perp = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ ovat kohtisuoria yksikkövektoreita. Radon-muunnos parametrien s ja α eri arvoilla esittää funktion f integraalit tason kaikkien suorien yli. Inversio-ongelmassa tehtävänä on määrittää funktio $f(x)$, kun tunnetaan funktio $Rf(s, \alpha)$. Tämän ongelman ratkaisi siis Johann Radon, ja seuraava Radonin käänteiskaava kertoo, miten alkuperäinen funktio f määrätään Radon-muunnoksesta:

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{s} \partial_s Rf(x \cdot \omega_\alpha + s, \alpha) d\alpha ds.$$

Tämän kaavan ja sen erilaisten diskreettien versioiden avulla pystytään periaatteessa muodostamaan kuvia kudoksesta, kun röntgenmittaukset tunnetaan. Toki kuvanmuodostuksen käytännön toteutuksessa tarvitaan huomattavaa panostusta fysiikan, insinööritieteiden ja laskennallisten tieteiden puolelta, ja käänteiskaavoihin perustuvien menetelmien lisäksi muitakin menetelmiä on käytössä.

Radon tutki ylläolevaa ongelmaa puhtaasta tieteellisestä mielenkiinnosta ajattelematta käytännön sovelluksia. Hyvä esimerkki vapaan tutkimuksen hyödyllisyydestä on se, että 1970-luvulla, jolloin teknologia oli riittävän kehittyneellä tasolla, Allan Cormack ja Godfrey Hounsfield kehittivät samaan matematiikkaan perustuvan tietokonetomografiaskannerin. Tietokonetomografia auttaa nykyään miljoonia ihmisiä sairauksien diagnosoinnissa, ja Cormack ja Hounsfield saivat työstään Nobelin lääketieteen palkinnon vuonna 1979.

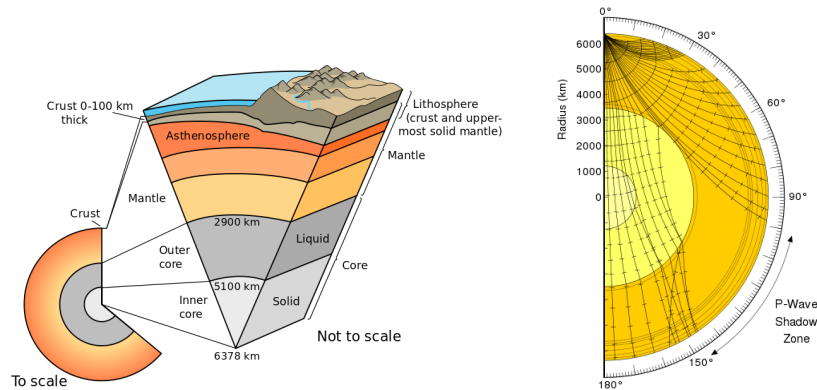
Radon-muunnoksen matematiikka toimii lääketieteellisen kuvantamisen lisäksi monessa muussakin tilanteessa. Sen avulla voidaan kuvantaa hyvin pieniä asioita, kuten viruksia (esimerkiksi HI-virus) elektronimikroskoopilla. Tässä sovelluksessa röntgensäteet korvataan elektronisuihkuilla, mutta kuvantamisen matematiikka on periaatteessa samanlaista. Virusten kuvantamiseen liittyy kuitenkin yksi erityispiirre: virukset ovat hyvin pieniä, ja monesti on vaikea tietää tarkasti, mistä suunnista mittaukset on saatu. Kuvan muodostaminen on mahdollista myös tässä tuntemattomien suuntien tapauksessa, ja tilanteen matemaattinen analyysi hyödyntää algebrallisen geometrian menetelmiä [5].

Radon-muunnoksen matematiikkaa voidaan käyttää vieläkin suuremmissa skaaloissa, kuten avaruustutkimuksessa [3]. Euroopan avaruusjärjestön ESA:n tutkimuskalustoon kuului vuoteen 2012 asti Envisat-satelliitti, jossa oli mukana suomalaistenkin kehittämä ilmakehän otsonimääriä mittaava GOMOS-instrumentti. GOMOS mittaa tähtien valon kirkkautta. Tähdet säteilevät valoa, ja kun valo kulkee ilmakehän läpi, niin ilmakehän kaasut, kuten otsoni, absorboivat valon voimakkuutta samalla tavalla kuin ihmiskudos absorboi röntgensäteiden fotoneja. Mittaustuloksena saadaan jälleen kerran integraaleja suorien yli. Radon-muunnos esiintyy siis tässäkin ongelmassa, ja sen käsittelyssä on hyödynnetty tilastollisia menetelmiä.

3 Seisminen kuvantaminen

Maapallon rakenteen yksityiskohtainen määrittäminen on haastava monitieteinen ongelma, ja siihen liittyviä tietoja voi hyödyntää mineraaliesiintymien etsinnässä tai maanjäristysten ennustamisessa. Maapalloa on ymmärrettävästi vaikea läpivalaista, mutta muita epäsuoria havaintoja voidaan tehdä. Perustietoja ovat maapallon säde (noin 6370 km jos maata ajatellaan pallona) ja massa, sekä näiden avulla tunnettu maapallon tiheys. Maan pinnalla ja pinnan lähellä voidaan tehdä erilaisia suoria havaintoja (syvin ihmisen poraama reikä Kuolan niemimaalla Venäjällä on noin 12 km syvä), ja vertaamalla näitä maan tiheyden tiedetään, että syvällä täytyy esiintyä tiheämpiä materiaaleja kuin pinnan lähellä. Lisäksi voidaan hyödyntää laboratoriokokeita, joissa simuloidaan oletettuja maapallon sisällä esiintyviä olosuhteita.

Tärkeimpiä menetelmiä maapallon rakenteen ymmärtämisessä on kuitenkin *seisminen kuvantaminen*. Maapalloa voidaan ajatella elastisena kappaleena, jossa erilaiset seismiset aallot etenevät. Ihmisen tuottamia keinotekoisia aaltoja voidaan hyödyntää pintaa lähellä olevan rakenteen selvittämiseen esimerkiksi öljyn etsinnässä. Syvän rakenteen tutkimista varten tarvitaan vahvempia aaltoja, ja tällaisille on oleellisesti yksi lähde: *maanjäristykset*. Maanjäristykset tapahtuvat pinnan lähellä, ja maapallon pinnalla on suuri määrä mittauspisteitä, joissa seismometrit rekisteröivät maankuoren värähtelyjä. Seismometriä tuottamista värähtelykäyristä (seismogrammeista) voidaan lukea erilaisia tietoja maanjäristyksen etenemisestä. Tällaisten mittausten perusteella oletetaan, että maapallolla on kerrosrakenne (kuva 3a): kuoren alla on tiheämpi vaippa, jonka alla ovat nestemäinen ulkoydin ja kiinteä sisäydin.



Kuvat 3a, 3b (USGS): Maapallon rakenne ja seismisten aaltojen eteneminen.

Eräs tieto, joka seismogrammeista voidaan lukea, on maanjäristyksen ensimmäisen aaltorintaman matka-aika mittauspisteeseen. Matka-aikoihin perustuvaa kuvantamismenetelmää kutsutaan matka-aikatomografiaksi (travel time tomography). Kuvataan seuraavaksi menetelmän idealisoitu matemaattinen malli, jossa tehdään useita yksinkertaistavia oletuksia: maapalloa ajatellaan suljettuna pallona $M \subset \mathbb{R}^n$ (toki käytännössä $n = 3$), seismisiä aaltoja kuvaa elastisen aaltoyhtälön sijaan akustinen aaltoyhtälö alueessa M , maapallon äänennopeus on riittävän säännöllinen positiivinen funktio $c(x)$ missä $x \in M$, ja ollaan ideaalilanteessa, jossa mittauspisteitä on kaikkialla maapallon ympärillä.

Maapallon äänennopeus ei ole vakio, joten aaltorintamat eivät etene suoria viivoja pitkin kuten röntgenkuvauksessa (kuva 3b). Aaltorintamien etenemistä voidaan kuvata äänennopeuden $c(x)$ geodeesien eli pienimmän vastuksen käyrien avulla. Jos $x, y \in M$ ovat kaksi maapallon pistettä, niiden välinen geodeettinen etäisyys äänennopeuden $c(x)$ suhteen on

$$d_c(x, y) = \inf_{\gamma: [0, L] \rightarrow M} \left[\int_0^L \frac{1}{c(\gamma(t))^2} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

missä infimum otetaan kaikkien alueen M paloittain C^1 käyrien suhteen, jotka lähtevät pisteestä x ja päätyvät pisteeseen y .

Matka-aikatomografian inversio-ongelma on seuraava: määritä maapallon äänennopeus $c(x)$, jos tunnetaan matka-aika $d_c(x, y)$ kaikille $x, y \in \partial M$. Tämä ongelma esiintyy sovelletussa kirjallisuudessa myös nimellä *käänteinen kinemaattinen ongelma*, ja sitä tutkivat jo 1900-luvun alussa geofyysikot Emil Wiechert ja Karl Zoeppritz sekä matemaatikko Gustav Herglotz. Seuraava tulos on vuodelta 1907 [4]: jos

- $c(x)$ on pallosymmetrinen, $c = c(r)$,
- $\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{c(r)} \right) > 0$,

niin matka-ajat määräävät äänennopeuden yksikäsitteisesti. Derivaattaehto tarkoittaa sitä, että äänennopeus ei saisi laskea liian voimakkaasti maapallon sisälle mentäessä. Tuloksen todistus hyödyntää Abelin integraalimuunnoksen kääntävyyttä.

4 Reunajäykkyysongelma

Matka-aikatomografiaongelma tuli paljon myöhemmin esille myös puhtaan matematiikan ja differentiaaligeometrian puolella, mutta hieman eri muodossa. Maapalloa voidaan kuvata avaruuden \mathbb{R}^n alueen sijaan kompaktina reunallisena monistona M , ja aaltorintamien etenemistä voidaan kuvata Riemannin metriikan g avulla (äänennopeus $c(x)$ vastaa Riemannin metriikkaa, joka on diagonaalimatriisi $(g_{jk}(x)) = (\frac{1}{c(x)^2} \delta_{jk})$). Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan,

että monisto M , reuna ∂M ja metriikka g ovat sileitä ($= C^\infty$). Jos $x, y \in M$, niin pisteiden x ja y välinen geodeettinen etäisyys on

$$d_g(x, y) = \inf_{\gamma: [0, L] \rightarrow M} \left[\int_0^L |\dot{\gamma}(t)|_g^2 dt \right]^{1/2}$$

missä infimum otetaan kaikkien moniston M paloittain C^1 käyrien suhteen, jotka lähtevät pisteestä x ja päätyvät pisteeseen y , ja $|v|_g$ on tangenttivektorin v normi metriikan g suhteen. Monissa tapauksissa infimum saavutetaan, ja tällöin lyhin pisteet x ja y yhdistävä käyrä on Riemannin moniston (M, g) *geodeesi* (=käyrä, joka toteuttaa ns. geodeesiyhtälön).

Reunajäykkyysongelma (boundary rigidity problem), jonka esitti René Michel vuonna 1981 [6], on seuraava: määritä kompaktin reunallisen moniston (M, g) Riemannin metriikka g reunan kiinnittävää isometriaa vaille, jos tunnetaan etäisyydet $d_g(x, y)$ kaikilla $x, y \in \partial M$. Tätä voidaan pitää yllä esitetyn matka-aikatomografiaongelman yleisempänä muotoiluna. Erityisesti Riemannin metriikka g voi olla *anisotrooppinen*, ts. yleinen positiivinen symmetrinen matriisi, joka ei ole välttämättä diagonaalimuotoa. Tämä vastaa sitä realistista tilannetta, jossa aaltojen etenemisnopeus riippuu niiden etenemissuunnasta.

Yllä esitetystä matka-aikatomografian yksikäsitteisyystuloksessa esiintyi derivaattaehto, joka esti äänennopeutta laskemasta liian voimakkaasti. Vastaavallaisia rajoitteita tarvitaan, jotta reunajäykkyysongelma olisi ratkaistavissa esitetystä muodosta (tämä nähdään helposti katsomalla monistoa, jossa äänennopeus yhden pisteen lähellä on hyvin alhainen ja äänennopeuden muutos tämän pisteen pienessä ympäristössä ei muuta matka-aikoja). Michel esitti vuoden 1981 työssään konjektuurin, että reunajäykkyysongelma on ratkeava ns. *yksinkertaisille* (simple) monistoille. Kompakti sileä reunallinen monisto on yksinkertainen jos se on yhdesti yhtenäinen, jokaista moniston M pisteparia yhdistää yksikäsitteinen lyhin geodeesi joka riippuu sileästi päätepisteistä, ja reuna ∂M on aidosti konvekksi. Esimerkkejä yksinkertaisista monistoista ovat

- avaruuden \mathbb{R}^n aidosti konvekssit rajoitetut alueet
- negatiivisesti kaareutuvien monistojen aidosti konvekssit alueet
- avoimen puolipallon aidosti konvekssit alueet.

Reunajäykkyysongelma samaistetaan kirjallisuudessa monesti Michelin konjektuuriin, jonka mukaan jokainen yksinkertainen monisto olisi reunajäykkä (ts. reunapisteiden etäisyydet määräävät metriikan isometriaa vaille). Konjektuurin todistivat kaksiulotteisille yksinkertaisille monistoille Pestov ja Uhlmann vuonna 2005 [9]. Korkeampiulotteisille monistoille on monia osittaisia tuloksia (Michél, Gromov, Besson-Courtois-Gallot, Croke-Kleiner, Otal, Stefanov-Uhlmann, Burago-Ivanov, . . .), mutta konjektuuri on edelleen avoin. Osa näistä tuloksista (mukaanlukien Pestovin ja Uhlmannin ratkaisu kaksiulotteisessa tapauksessa) perustuu *sädemuunnosten* matematiikkaan, jota käsitellään seuraavassa luvussa ja joka antaa myös yhteyden ylläolevien ongelmien ja röntgenkuvausten välille.

5 Sädemuunnos

Jos (M, g) on yksinkertainen monisto, niin reunaajäykkyysongelma palautuu oleellisesti kuvauksen $g \mapsto d_g|_{\partial M \times \partial M}$ kääntyvyyteen. Tämä kuvaus on vahvasti epälineaarinen, sillä lyhimmät matka-ajat $d_g|_{\partial M \times \partial M}$ riippuvat äänennopeudesta epälineaarisella tavalla. Yleinen menetelmä käsitellä epälineaarisia kuvauksia on käyttää niiden *linearisaatioita*, eli (Fréchet)-derivaattoja, kuten esimerkiksi Newtonin menetelmässä nollakohtien etsimiseksi tehdään.

Kuvauksen $g \mapsto d_g|_{\partial M \times \partial M}$ linearisaatio operoi Riemannin metriikoiden g tangenttivektoreihin, jotka ovat symmetrisiä 2-tensorikenttiä (siis oleellisesti symmetrisiä matriisifunktioita $(f_{jk}(x))$ monistolla M). Linearisaatio on helppo määrittää: osoittautuu, että linearisaatio voidaan samaistaa sädemuunnoksen I_2 kanssa. Seuraavassa oletetaan, että monisto (M, g) on *nontrapping* (=sillä ei ole vangittuja geodeeseja, eli jokainen geodeesi pääsee reunalle äärellisessä ajassa).

Määritelmä. Jos $f = (f_{i_1 \dots i_m})$ on symmetrinen m -tensorikenttä reunallisella monistolla M , sen (geodeettinen) *sädemuunnos* on funktio

$$I_m f(x, v) = \int_0^{\tau_g(x, v)} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n f_{i_1 \dots i_m}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^{i_1}(t) \dots \dot{\gamma}^{i_m}(t) dt, \quad x \in \partial M, v \in S_x M,$$

missä $S_x M = \{v \in T_x M; |v|_g = 1\}$ on pisteen x yksikkötangenttivektorien joukko, ja $\tau_g(x, v)$ on pisteestä x suuntaan v lähtevän geodeesin matka-aika eli se aika, jossa geodeesi poistuu monistolta M . (Tässä $\dot{\gamma}^i(t)$ on tangenttivektorin $\dot{\gamma}(t)$ i :s komponentti joissain lokaaleissa koordinaateissa, osoittautuu että ylläoleva määritelmä ei riipu koordinaattien valinnasta.)

Sädemuunnoksen abstrakti määritelmä on helppo ymmärtää tapauksessa $m = 0$. Tällöin f on funktio alueessa M , ja sädemuunnos $I_0 f$ esittää funktion f integraalit kaikkien alueen reunalta lähtevien ja reunalle palaavien geodeesien yli. Jos M on konvekksi alue avaruudessa \mathbb{R}^n , niin kaikki geodeesit ovat suoria ja $I_0 f$ vastaa funktion f Radon-muunnosta (integraaleja suorien yli).

Sädemuunnos I_m on siis Radon-muunnoksen yleistys, jossa suorat korvataan yleisemmällä käyrillä (jonkin Riemannin metriikan geodeeseilla), ja jossa integroitava suure voi olla funktion sijaan symmetrinen m -tensorikenttä. Tensorikenttien sädemuunnoksilla on useita käytännön kuvantamissovelluksia:

- $m = 0$: tavallinen Radon-muunnos \mathbb{R}^n :ssä, matka-aikatomografiaongelma äänennopeuksille $c(x)$, ultraäänikuvantaminen
- $m = 1$: Doppler-ultraäänikuvantaminen, jossa kuvataan veren virtausta suonissa esimerkiksi veritulppien havaitsemiseksi (1-tensori vastaa virtauksen vektorikenttää)
- $m = 2$: matka-aikatomografia matriisiarvoisille (anisotrooppisille) äänennopeuksille, reunaajäykkyysongelman linearisaatio

- $m = 4$: matka-aikatografia elastiselle aaltoyhtälölle, jossa esiintyviä parametreja kuvataan 4-tensorilla

Osoittautuu, että matka-aikatografian ongelman ratkaisulla ja sädemuunnoksen kääntyvyydellä on monia yhteyksiä. Lisäksi jos $m \geq 1$, niin löytyy aina triviaali luokka m -tensoreita, joiden sädemuunnos on nolla: nämä ovat reunalla häviävien $(m - 1)$ -tensorien sisäderivaattoja (=kovariantin derivaatan symmetrisaatioita). Tämä seuraa suoraan analyysin peruslauseesta, sillä välin $[a, b]$ reunalla häviävän funktion derivaatan integraali on nolla. Sanotaan, että sädemuunnos on *s-injektiivinen*, jos nämä ovat ainoat nollaksi integroituvat tensorit.

Sädemuunnosten teorian perustava kysymys on *tensoritomografiakonjektuuri* (Pestov-Sharafutdinov 1988 [8]): jos (M, g) on yksinkertainen monisto, onko sädemuunnos I_m *s-injektiivinen* kaikilla $m \geq 0$? Tämä tulos tunnetaan tapauksessa $m = 0$ (Mukhometov 1977) ja $m = 1$ (Anikonov 1978). Kaksiulotteisessa tapauksessa konjektuuri on nyt todistettu [7]:

Lause 1. (Paternain-Salo-Uhlmann 2013) Jos (M, g) on kaksiulotteinen yksinkertainen monisto, niin I_m on *s-injektiivinen* kaikilla $m \geq 0$.

Todistus hyödyntää yhteyttä kompleksigeometriassa esiintyvään Kodairan häviämislauseeseen ja lääketieteen SPECT-kuvantamismenetelmän (Single Photon Emission Computed Tomography) käyttämään ns. vaimennettuun Radonmuunnokseen. Korkeampiulotteisille monistoille tunnetaan useita osittaisia tuloksia, mutta konjektuuri ylläolevassa muodossa on avoin kun $\dim(M) \geq 3$.

6 Avoimia ongelmia

Tekstin loppuksi esitetään muutamia avoimia matemaattisia ongelmia aihepiiriin liittyen. Reunajäykkyysongelma Michélin esittämässä muodossa on edelleen ratkaisematta dimensioissa ≥ 3 :

Avoin ongelma 1. (Reunajäykkyysongelma) Jos (M, g) on yksinkertainen monisto ja $\dim(M) \geq 3$, niin reunapisteiden väliset etäisyydet määräävät metriikan g yksikäsitteisesti reunan kiinnittävää isometriaa vaille.

Myös edellisen ongelman linearisoitu versio (joka vastaa 2-tensorien sädemuunnosta) on auki korkeampiulotteisilla monistoilla:

Avoin ongelma 2. (Tensoritografia) Jos (M, g) on yksinkertainen monisto ja $\dim(M) \geq 3$, niin sädemuunnos I_m on *s-injektiivinen* kun $m \geq 2$.

On viitteitä siitä, että sädemuunnoksen kääntyvyys voisi päteä laajemmassa monistoluokassa kuin reunajäykkyys [7]. Seuraavalla perustavalla kysymyksellä funktioiden sädemuunnoksesta nontrapping monistoilla olisi sovelluksia useisiin inversio-ongelmiin (mm. Suomessakin paljon tutkittuun Calderónin käänteiseen johtavuusongelmaan, katso [1] ja [2]):

Avoin ongelma 3. (Sädemuunnos nontrapping monistoilla) Jos (M, g) on kompakti nontrapping monisto, jolla on aidosti konvekssi reuna, niin sädemuunnos I_0 on injektiivinen.

Viitteet

- [1] D. Dos Santos Ferreira, C.E. Kenig, M. Salo, G. Uhlmann, *Limiting Carleman weights and anisotropic inverse problems*, Invent. Math. **178** (2009), 119–171.
- [2] D. Dos Santos Ferreira, Y. Kurylev, M. Lassas, M. Salo, *The Calderón problem in transversally anisotropic geometries*, preprint (2013), arXiv:1305.1273.
- [3] H. Haario, M. Laine, M. Lehtinen, E. Saksman, J. Tamminen, *Markov chain Monte Carlo methods for high dimensional inversion in remote sensing*, J. Royal Statist. Soc. B **66** (2004), 591–607.
- [4] G. Herglotz, *Über das Benndorfsche Problem der Fortplanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen*, Phys. Zeit. **8** (1907), 145–147.
- [5] L. Lamberg, L. Ylinen, *Two dimensional tomography with unknown view angles*, Inverse Probl. Imaging **1** (2007), 623–642.
- [6] R. Michel, *Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques*, Invent. Math. **65** (1981), 71–83.
- [7] G.P. Paternain, M. Salo, G. Uhlmann, *Tensor tomography on surfaces*, Invent. Math. **193** (2013), 229–247.
- [8] L. Pestov, V.A. Sharafutdinov, *Integral geometry of tensor fields on a manifold of negative curvature*, Siberian Math. J. **29** (1988), 427–441.
- [9] L. Pestov, G. Uhlmann, *Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid*, Ann. of Math. **161** (2005), 1093–1110.
- [10] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse, 1917.