INVERSIO-ONGELMAT – MATEMATIIKKAA JA SEN SOVELLUKSIA

MIKKO SALO

1. Johdanto

Inversio-ongelmien teoria on matematiikan ja sen sovellusten kirjossa edelleen varsin nuori tutkimusala. Yksittäisiä ongelmia on toki tutkittu kauan, ja ensimmäinen yhtenäinen osakokonaisuus lienee 1950-luvulla kehitetty Gel'fandin koulukunnan yksiulotteinen käänteinen sirontateoria. Muutaman vuosikymmenen hiljaiselon jälkeen myös moniulotteisissa inversio-ongelmissa saavutettiin läpimurtoja, ja 1980-luvulla alan teoria monipuolistui ja alkoi kasvaa nopeasti. Suomessa inversioteorian tutkimus alkoi 1980-luvun alussa Helsingin yliopiston funktionaalianalyysin tutkijoiden piirissä. Suomen Inversioseura perustettiin 1997. Itse kuulin inversio-ongelmista vuonna 2000 Oulun yliopistossa opiskellessani, ja silloin Suomessa oli jo laaja alan tutkimusyhteisö.

Kiinnostus inversio-ongelmia kohtaan on viime vuosina yhä lisääntynyt sekä Suomessa että maailmalla. Väitettä voi perustella sillä, että inversio-ongelmien artikkeleita julkaistaan yhä useammin matematiikan arvostetuimmissa julkaisuissa (kuten Annals of Mathematics), tai sillä, että Suomen Akatemia myönsi alan Suomen tutkimusryhmille huippuyksikön aseman vuodesta 2006 alkaen. Lisäksi termi 'inversio-ongelmat' esiintyy uusissa yhteyksissä: olin yllättynyt, kun matematiikan Fields-mitalisti Timothy Gowers keväällä 2006 Seattlessa pitämässään esitelmässä alkoi puhua aritmeettisen kombinatoriikan inversio-ongelmista.

Tämä artikkeli on osa sarjaa, jossa nuoret matemaatikot esittelevät omaa työtään ja tutkimusalojaan. Olen siksi valinnut paikoin tavallista henkilökohtaisemman kirjoitustyylin. Oma tutkimukseni on enimmäkseen keskittynyt inversio-ongelmiin, ja väitöskirjani Calderónin ongelmasta ja siihen liittyvistä kysymyksistä valmistui vuonna 2004. Käsittelen alla ensin muutamia inversio-ongelmia yleisesti, ja sitten Calderónin ongelmaa ja omaa työtäni hieman yksityiskohtaisemmin. Lopussa oleva liite sisältää lyhyen johdatuksen osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja muutamiin hyödyllisiin työkaluihin, mutta artikkelia voinee lukea myös ilman näitä tietoja.

Inversio-ongelmien alalla eletään juuri nyt kiinnostavaa vaihetta. Toivon, että artikkelin lukijoille välittyy kuva tutkimusalasta, jossa moderni matematiikka ja reaalimaailman sovellukset kohtaavat hedelmällisellä tavalla.

Ilmestyy Arkhimedeksen numerossa 5/2006.

2. Inversio-ongelmista

Mitä ovat inversio-ongelmat? Käsitettä selitetään lähes aina syiden ja seurausten avulla, enkä aio tehdä poikkeusta. Perinteisissä ongelmissa (inversiokielellä *suorissa ongelmissa*) tunnetaan ilmiöön vaikuttavat syyt, ja halutaan tietää seuraukset. Inversio-ongelmassa eli käänteisessä ongelmassa tilanne käännetään toisinpäin: nyt tunnetaankin seuraukset, ja halutaan tietää, mitkä tekijät johtivat tulokseen. Seuraavassa esimerkkinä kolme inversio-ongelmaa, joista olen itse ollut kiinnostunut.

1. **Calderónin ongelma**: voidaanko ihmisen sisäinen rakenne selvittää tekemällä sähkövirta- ja jännitemittauksia iholla?
2. **Seisminen sirontaongelma**: voidaanko maan sisältä löytää mineraaliesiintymiä mittaamalla näistä sironneita ääniaaltoja?
3. **Matka-aikatomografia**: voidaanko maapallon ytimen rakenne selvittää, jos tunnetaan maanjäristysten kulkuajat maapallon läpi?

Kaikki kolme ongelmaa sisältävät tutkittavan objektin (ihmisen keho tai maapallo), ja tilanteen, josta saadaan mittaustuloksia eli seurauksia (sähköiset mittaukset, sironneet ääniaallot tai maanjäristysten kulkuajat). Tässä tapauksessa suora ongelma olisi laskea mittaustulokset, kun tutkittava objekti tiedetään. Käytännössä hyödyllisempää, mutta usein myös vaikeampaa, on ratkaista inversio-ongelma, eli selvittää tutkittavan objektin ominaisuudet kun mittaustulokset tiedetään.

Monet inversio-ongelmat liittyvät mittaustilanteisiin, ja käytännön sovellukset ovatkin oleellinen osa alaa. Toisaalta tutkittavan objektin ominaisuudet voivat olla syvällä piilossa mittaustulosten sisällä, ja ongelmien ratkaisemiseen tarvitaan usein vaativaa matematiikkaa. Tämä teorian ja sovellusten vuorovaikutus on omasta matemaatikon näkökulmastani kiehtova piirre: inversio-ongelmat tarjoavat mahdollisuuden tehdä haastavaa matematiikan tutkimusta aiheista, jotka nousevat reaalimaailmasta.

Minkälaista matematiikkaa yllä esitetyissä inversio-ongelmissa tarvitaan? Yritän kuvata tätä seuraavassa lyhyesti ja hyvin yleisellä tasolla.

Kaksi ensimmäistä ongelmaa liittyvät tilanteisiin, joita kuvataan differentiaaliyhtälöillä. Calderónin ongelma perustuu sähkön johtumiseen, ja ilmiötä voidaan kuvata elliptisellä yhtälöllä (johtavuusyhtälö). Seismisessä sirontaongelmassa taas voidaan käyttää hyperbolisia yhtälöitä (aaltoyhtälö). Molemmissa tilanteissa tutkittavan objektin ominaisuudet vaihtelevat paikasta toiseen (ihmisen erilaiset kudokset, tai maan eri kivilajit), joten yhtälöiden kerroinfunktiot (kudoksen sähkönjohtavuus tai maan rakenteiden äänen nopeus) riippuvat paikasta eivätkä ole vakioita. Ongelmissa hyödynnetään monipuolisesti matemaattisen analyysin ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teorian laajaa kalustoa, ja yhtälöiden ratkaisujen tarkka analysointi on tärkeässä osassa.

Kolmas ongelma voidaan muotoilla differentiaaligeometrian ongelmana. Jos äänen nopeus maan sisäpisteessä x on $c(x)$, ja jos y ja z ovat pisteitä maapallon pinnalla, niin maanjäristyksen kulkuaikaa pisteestä y pisteeseen z voidaan ajatella lyhimmän sellaisen geodeesin pituutena, joka yhdistää nämä pisteet. Pituus lasketaan Riemannin metriikan $ds^2 = c(x)^{-2}dx^2$ suhteen.

Äänen nopeus voi käytännössä riippua paikan lisäksi myös äänen kulkusuunnasta, ja tätä voidaan kuvata yleisellä Riemannin metriikalla g. Siksi matka-aikatomografian ongelman seuraava, differentiaaligeometriasta peräisin oleva muotoilu on luonteva myös käytännön kannalta.

> **Reunarigiditeettiongelma**: Olkoon (M, g) reunallinen Riemannin monisto. Jos tunnetaan kaikkien reunapisteparien y, z väliset geodeettiset etäisyydet, voidaanko määrätä metriikka g?

Matematiikan kiinnostavimpia puolia lienee se, että hyvin erilaisten ongelmien välillä on yllättäviä yhteyksiä. Tämä koskee myös inversio-ongelmia: Leonid Pestov ja Gunther Uhlmann [18] löysivät merkillisen yhteyden reunarigiditeettiongelman ja Calderónin ongelman välillä, ja pystyivät ratkaisemaan erään differentiaaligeometrian konjektuurin käyttämällä hyväksi Calderónin ongelman analyysiä.

3. Calderónin ongelma

Johdannossa mainittu Calderónin ongelma, joka tunnetaan myös nimellä *käänteinen johtavuusongelma*, oli seuraava:

> Voidaanko ihmisen sisäinen rakenne selvittää tekemällä sähkövirta- ja jännitemittauksia iholla?

Tässä "ihmisen sisäinen rakenne"tarkoittaa kudoksen sähkönjohtavuuden eroja. Terve kudos johtaa sähköä hyvin eri tavalla kuin syöpäkudos, joten menetelmää on ehdotettu mm. rintasyöpäkasvaimien etsimiseen.

Kuvattavaa ihmiskehon osaa voidaan ajatella $\mathbf{R}^n$:n rajoitettuna joukkona Ω (ihmisen tapauksessa toki $n = 3$), ja kudoksen sähkönjohtavuus on positiivinen funktio $\gamma : \Omega \to \mathbf{R}$. Kuvattavan alueen reunalle $\partial\Omega$ laitetaan elektrodeja, ja näillä voidaan asettaa reunalle jännitejakauma $f(x)$, $x \in \partial\Omega$. Tietyllä oletuksilla alueen Ω sisään syntyvä jännitepotentiaali $u(x)$, $x \in \Omega$, toteuttaa johtavuusyhtälön

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Kuvausmenetelmässä mitataan alueen reunalta ulos tuleva sähkövirta, joka on

$$\gamma(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Tässä $\partial u/\partial\nu(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ on *normaaliderivaatta*, missä $\nu(x)$ on reunan $\partial\Omega$ yksikköulkonormaalivektori pisteessä x.

Mittausdata on siis kuvaus $\Lambda_\gamma : f \mapsto \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$, missä f on esimerkiksi jatkuva funktio reunalla $\partial\Omega$. Inversio-ongelman matemaattinen muotoilu on seuraava.

> **Calderónin ongelma**: Jos tunnetaan Λ_γ (siis tiedetään $\Lambda_\gamma f$ kaikille reunan jännitekonfiguraatioille, ts. jatkuville funktioille f), voidaanko tästä määrittää γ?

Jos johtavuus γ tunnettaisiin, ei olisi vaikeaa laskea johtavuusyhtälön ratkaisuja ja määrittää mittauksia Λ_γ. Käytännön mittaustilanteessa tunnetaan kuitenkin Λ_γ, ja halutaan määrittää γ. On ilmeistä, että johtavuus γ riippuu mittausdatasta Λ_γ hyvin monimutkaisella tavalla, eikä ole ollenkaan selvää, miten johtavuutta voitaisiin ryhtyä määrittämään.

Miten johtavuus saadaan sitten selville? Eräs ajatus on, että reunan jännitekonfiguraatio f valittaisiin niin, että ratkaisu u keskittyisi annettuun sisäpisteeseen $x_0 \in \Omega$, ts. u olisi suuri x_0:n lähellä ja pieni muualla. Tällaisten ratkaisujen avulla voitaisiin hakea γ:n arvoa x_0:n lähellä. Yritys tuottaa kuitenkin vesiperän, sillä tasapainotilassa olevalla jännitepotentiaalilla ei voi olla jännitepiikkejä. Tämän periaatteen matemaattinen muotoilu on ns. *elliptinen maksimiperiaate*: u ei voi saavuttaa maksimiarvoaan Ω:n sisäpisteessä.

Tiedetään siis, että johtavuusyhtälön ratkaisut eivät voi keskittyä alueen sisäpisteeseen. Seuraava yritys, Fourier-muunnoksen innoittamana, voisi olla keskittää ratkaisu pisteen sijasta tietylle *taajuudelle.* Pian kuitenkin huomataan, että tämäkään ei auta, sillä taajuudelle $\xi \in \mathbf{R}^n$ keskittyvä funktio $u = e^{ix\cdot\xi}$ ei voi olla edes vakiokertoimisen johtavuusyhtälön $\Delta u = 0$ ratkaisu (paitsi triviaalissa tapauksessa $\xi = 0$, jolloin u on vakio).

Pieni modifikaatio tuottaa kuitenkin tuloksen: jos käytetään reaalisen taajuden $\xi \in \mathbf{R}^n$ sijasta *kompleksista taajuutta* eli vektoria $\rho \in \mathbf{C}^n$, on helppo nähdä, että yhtälöllä $\Delta u = 0$ on ratkaisuja $u = e^{ix\cdot\rho}$. Riittää valita ρ siten, että sen reaali- ja imaginääriosa ovat ortogonaaliset ja yhtä pitkät. Tällaisten ratkaisujen käyttö käänteisessä johtavuusongelmassa on peräisin Alberto Calderónilta, joka uraauurtavassa artikkelissaan [4] vuodelta 1980 muotoili ongelman täsmällisesti ja käytti kyseisiä ratkaisuja ongelman helpomman, linearisoidun version tutkimiseen.

Calderónin työ oli alkulaukaus käänteisen johtavuusongelman tutkimukselle, ja Calderónin ongelma ja muut elliptisten yhtälöiden inversio-ongelmat ovatkin tärkeä ja paljon tutkittu osa-alue inversio-ongelmien matemaattisessa teoriassa. Vuonna 1987 John Sylvester ja Gunther Uhlmann [21] ratkaisivat Calderónin ongelman kahdesti derivoituville johtavuuksille tapauksessa $n \geq 3$. Menetelmässä redusoitiin ensin johtavuusyhtälö helpompaan Schrödinger-yhtälöön, joka on muotoa

$$(-\Delta + V(x))u(x) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{1}$$

Tässä $V : \Omega \to \mathbf{R}$ on funktio, joka riippuu johtavuudesta γ. Sylvester ja Uhlmann osoittivat, että myös tapauksessa $V \neq 0$ yhtälöllä on ratkaisuja, jotka muistuttavat Calderónin funktioita $e^{ix\cdot\rho}$. Hieman tarkemmin, Schrödinger-yhtälöllä on ratkaisuja, jotka ovat muotoa

$$u(x) = e^{\frac{1}{h}ix\cdot\rho}(1 + r(x)),$$

missä $\rho \in \mathbf{C}^n$ on kompleksinen vektori kuten yllä, $h > 0$ on pieni parametri, ja $r(x)$ on virhetermi. Jos h valitaan riittävän pieneksi niin myös virhetermi on pieni, ja ratkaisu on hyvin lähellä Calderón-tyyppistä funktiota $e^{\frac{1}{h}ix\cdot\rho}$. Tällaisia ns. kompleksisia geometrisen optiikan ratkaisuja eli *CGO-ratkaisuja* (CGO = complex geometrical optics) käyttämällä saadaan johtavuus määritettyä reunamittauksista. Samaa tekniikkaa ja sirontateorian menetelmiä käyttämällä Adrian Nachman [12] antoi konstruktiivisen algoritmin johtavuuden määräämiseksi.

Sylvesterin ja Uhlmannin menetelmä ei toimi tapauksessa $n = 2$. Kaksiulotteisessa tapauksessa ratkaisua jouduttiin odottamaan 1990-luvun puoliväliin, jolloin Nachman [13] todisti, että reunamittaukset määräävät johtavuuden myös kahdessa dimensiossa. Todistus perustui edelleen CGO-ratkaisuihin, mutta nyt pientä parametria h ei voinut käyttää ja ratkaisuista vaadittiin enemmän informaatiota. Todistuksessa hyödynnettiin sirontateorian tekniikoita.

Nachmanin todistus, kuten myös Sylvester-Uhlmannin todistus, vaatii, että johtavuusfunktio γ on kahdesti derivoituva. Calderónin alkuperäinen konjektuuri kuitenkin sanoi, että rajoitettu ja mitallinen johtavuus (ts. $\gamma \in L^\infty$) määräytyisi reunamittauksista. Kysymys on relevantti myös käytännön kannalta, sillä ihmisen kudoksen sähkönjohtavuudessa esiintyy hyppyjä, joiden mallintamiseen derivoituvat funktiot eivät välttämättä sovellu.

Läpimurto tapahtui suomalaisten toimesta: vuonna 2003, jolloin Suomessa vietettiin inversio-ongelmien teemavuotta, Kari Astala ja Lassi Päivärinta [2] julkistivat todistuksen Calderónin konjektuurille kaksiulotteisessa tapauksessa. CGO-ratkaisut ja Beals-Coifmanin sirontateoria olivat edelleen merkittävässä osassa, mutta nyt näihin yhdistettiin Suomen matematiikan perinteinen vahvuusalue, kvasikonformikuvausten teoria. Jos johtavuus on vain L^∞-funktio niin CGO-ratkaisut ovat erittäin huonosti käyttäytyviä, mutta pitkälle hiotusta kvasikonformiteoriasta löytyi riittävästi työkaluja näidenkin ratkaisujen hallintaan ja Calderónin ongelman ratkaisuun.

4. Schrödinger-yhtälön inversio-ongelmia

Siirrytään nyt johtavuusyhtälöstä toiseen matematiikan perusyhtälöön, (aikariippumattomaan) Schrödinger-yhtälöön, joka nähtiin jo yllä kaavassa (1). Määritellään magneettinen Schrödinger-operaattori

$$H_{A,V} = -(\nabla + iA)^2 + V,$$

missä $A = (A_1, \ldots, A_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$ on vektorikenttä (magneettinen potentiaali), ja $V : \Omega \to \mathbf{R}$ on funktio (sähköinen potentiaali). Tässä $\nabla + iA$ on ns. *magneettinen gradientti*. Jos $A = 0$, niin $H_{0,V} = -\Delta + V$, eli saadaan tavallinen Schrödinger-operaattori. Yleisemmin, laskemalla auki $H_{A,V}$:n määritelmässä oleva neliö saadaan

$$H_{A,V} = -\Delta - 2i \sum_{j=1}^{n} A_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + (A \cdot A - i\nabla \cdot A + V)$$

Kyseessä on siis Laplace-operaattori, jota on häiritty ensimmäisen ja nollannen kertaluvun termeillä.

Analogisesti johtavuusyhtälön kanssa, myös magneettiselle Schrödinger-operaattorille voidaan määritellä reunamittaukset

$$\Lambda_{A,V} : f \mapsto (\nabla + iA)u \cdot \nu|_{\partial\Omega},$$

missä u toteuttaa yhtälön $H_{A,V}u = 0$ reuna-arvoilla $u|_{\partial\Omega} = f$. Siis $\Lambda_{A,V}$ kuvaa reunalla määritellyn funktion f sitä vastaavan ratkaisun magneettiseksi normaaliderivaataksi. Inversio-ongelmassa halutaan saada tietoa kertoimista A ja V, jos reunamittaukset $\Lambda_{A,V}$ tunnetaan.

Miksi tutkia Schrödinger-yhtälön inversio-ongelmia? Kvanttimekaniikassa aikariippumaton Schrödinger-yhtälö on perustyökalu, jolla kuvataan hiukkasten sidottuja tiloja ja sirontaongelmia. Edellä annettu inversio-ongelma osoittautuu ekvivalentiksi tiettyjen sirontaongelmien kanssa, joissa halutaan saada tietoa sirottajasta, esim. atomin ytimestä, sirontamittausten avulla. Kiinteän energian sirontaongelmia on pystytty tutkimaan käyttämällä Schrödinger-yhtälön inversio-ongelman ratkaisutekniikoita.

Schrödinger-yhtälö on hyödyllinen muistakin syistä: kuten yllä nähtiin, johtavuusyhtälön inversio-ongelma voitiin palauttaa Schrödinger-yhtälöön $(-\Delta + V)u = 0$. Osoittautuu, että samanlainen reduktio voidaan tehdä vaikeammillekin yhtälöille, tai yhtälöryhmille. Esimerkiksi Calderónin ongelmaa vastaavan Maxwell-yhtälöiden inversio-ongelman voi palauttaa Schrödinger-yhtälöön matriisipotentiaalilla (Maxwell-yhtälöiden inversio-ongelman ratkaisivat Petri Ola, Lassi Päivärinta ja Erkki Somersalo [16]). Reduktion fysikaalinen tulkinta ei aina ole helppoa, mutta tässä nähdäänkin eräs matematiikan vahvuuksista: kun reaalimaailman ongelma mallinnetaan matemaattisesti, lähtökohdan voi ainakin osittain unohtaa ja ongelmaa voi tutkia käyttämällä abstrakteja matemaattisia työkaluja. Parhaassa tapauksessa nämä johtavat alkuperäisen ongelman ratkaisuun.

Kaikkia yhtälöitä ei voida palauttaa Schrödinger-yhtälöön $(-\Delta+V)u = 0$. Osoittautuu kuitenkin, että monet lineaaristen yhtälöiden inversio-ongelmat (esim. elastiikan yhtälöt, Dirac-yhtälöt, Maxwellin yhtälöt kiraalisessa väliaineessa) palautuvat Schrödinger-matriisiyhtälöön, jossa on ensimmäisen kertaluvun termi. Mallina voidaan siis käyttää ylläolevaa magneettista Schrödinger-operaattoria $H_{A,V}$.

Magneettisen Schrödinger-operaattorin eräs perusominaisuus on *mittainvarianssi* (= yhtälöön sisältyvä algebrallinen rakenne): jos $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$ on funktio, helposti nähdään, että

$$e^{-i\varphi} H_{A,V}(e^{i\varphi} u) = H_{A+\nabla\varphi,V} u. \tag{2}$$

Siis kerroin A voidaan vaihtaa uudeksi vektorikentäksi $A + \nabla\varphi$ kertomalla harmittomalla eksponenttifunktiolla. Jos lisäksi $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, nähdään että tämä *mittamuunnos* säilyttää reunamittaukset:

$$\Lambda_{A+\nabla\varphi,V} = \Lambda_{A,V}. \tag{3}$$

Inversio-ongelmassa on annettu reunamittaukset $\Lambda_{A,V}$, ja tehtävänä on määrätä kertoimet A ja V. Selvästi $\Lambda_{A,V}$ voi määrätä vektorikentän A korkeintaan gradienttia vaille. Tarkastellaan siis A:n sijasta *magneettikenttää* dA. Jos $n = 3$ niin dA on roottori $\nabla \times A$, ja yleisesti dA on A:ta vastaavan 1-muodon ulkoderivaatta. Koska $d(A + \nabla\varphi) = dA$, inversio-ongelma voidaan asettaa seuraavasti.

> **Magneettisen Schrödinger-yhtälön inversio-ongelma**: Olkoon $A : \Omega \to \mathbf{R}^n$ vektorikenttä ja $V : \Omega \to \mathbf{R}$ funktio. Jos reunamittaukset $\Lambda_{A,V}$ on annettu, määrää magneettikenttä dA ja sähköinen potentiaali V.

Väitöskirjani käsitteli tätä inversio-ongelmaa, mutta mutkan kautta. Kun olin jatko-opiskelija Oulun yliopistossa, minulle tarjoutui mahdollisuus viettää vuosi Seattlessa Gunther Uhlmannin ohjauksessa. Aloitin väitöskirjatutkimukseni Seattlessa keväällä 2003, ja aiheeksi Uhlmann (joka toimi väitöskirjani ohjaajana Lassi Päivärinnan kanssa) ehdotti Calderónin ongelmaa C^1-johtavuusfunktioille tapauksessa $n \geq 3$. En kuitenkaan pystynyt sanomaan aiheesta juuri mitään. Ongelman vaikeus oli ohjaajilla luultavasti tiedossa, ja heillä oli varasuunnitelma: menetelmät saattaisivat antaa uusia tuloksia magneettiselle Schrödinger-yhtälölle. Näin onneksi kävikin.

Esittelen lopuksi muutamia tuloksia magneettisen Schrödinger-yhtälön inversio-ongelmista. Viittauksissa ei pyritä täydellisyyteen, ja tarkempia lähdetietoja löytyy annetuista artikkeleista.

Seuraavassa $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ on rajoitettu, avoin, yhdesti yhtenäinen joukko jolla on C^∞-reuna, ja $n \geq 3$. Lisäksi $A : \Omega \to \mathbf{R}^n$ on vektorikenttä, ja $V \in L^\infty(\Omega)$ on sähköinen potentiaali. Kuten Calderónin ongelmassa, voidaan kysyä, mitä säännöllisyysoletuksia vektorikentältä A vaaditaan, jotta dA saadaan määrättyä reunamittauksista.

Seuraava lause on eräs väitöskirjani päätuloksista. Tulos kertoo, että reunamittaukset $\Lambda_{A,V}$ määräävät yksikäsitteisesti Dini-jatkuvaa potentiaalia vastaavan magneettikentän.

Lause 1. [20] Olkoot A_1, A_2 Dini-jatkuvia vektorikenttiä Ω:ssa. Jos $\Lambda_{A_1,V_1} = \Lambda_{A_2,V_2}$, niin $dA_1 = dA_2$.

Funktio $f : \Omega \to \mathbf{R}$ on Dini-jatkuva jos $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$, missä $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ on jatkuva, kasvava funktio, joka toteuttaa ehdot

$$\omega(0) = 0, \qquad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Kyseessä on siis heikko, Hölder-jatkuvuutta lievempi jatkuvuusoletus.

Lauseen todistus perustuu CGO-ratkaisujen käyttöön, kuten Calderónin ongelman tapauksessa. Magneettiselle yhtälölle CGO-ratkaisujen löytäminen ei kuitenkaan ole helppoa, sillä magneettinen termi A ei ole Laplace-operaattorin harmiton häiriö. Termi voitaisiin yrittää poistaa mittamuunnosta (2) käyttämällä, mutta tällä tavalla A:han voidaan vain lisätä gradientteja eikä koko termi poistu. Ongelman ratkaisivat Uhlmann ja Gen Nakamura [15]: korvaamalla eksponenttifunktiot $e^{i\varphi}$ yleisemmillä pseudodifferentiaalioperaattoreilla, saadaan eräänlainen *pseudodifferentiaalinen mittamuunnos*, jolla termi A voidaan hävittää. Menetelmä toimii, jos vektorikentät ovat hyvin säännöllisiä. Lauseen 1 todistuksessa Nakamuran ja Uhlmannin menetelmä yleistetään tapaukseen, jossa vektorikentät ovat vain jatkuvia.

Lauseen 1 todistus ei ole konstruktiivinen, eli se ei anna algoritmia, jolla magneettikenttä dA voitaisiin saada selville mittaustuloksista $\Lambda_{A,V}$. Seuraava tulos korjaa tämän ongelman ja antaa konstruktiivisen algoritmin.

Lause 2. [19] Jos A on jatkuvasti derivoituva vektorikenttä Ω:ssa, niin dA voidaan määrittää mittauksista $\Lambda_{A,V}$.

Tapauksessa $A = 0$ (joka vastaa Calderónin ongelmaa) on jo kauan tunnettu Nachmanin menetelmä [12], jolla V voidaan laskea $\Lambda_{0,V}$:sta. Magneettikentille tällaista tulosta ei ollut, sillä edellä mainitussa Nakamuran ja Uhlmannin menetelmässä on mystinen puute: se ei anna minkäänlaista yksikäsitteisyyttä saaduille CGO-ratkaisuille. Tämä estää Calderónin ongelmassa niin hyödyllisten sirontateorian tekniikoiden käytön. Lauseen 2 todistuksessa tämä puute poistetaan menemällä syvemmälle pseudodifferentiaaliteoriaan, missä mallia otetaan epälineaaristen Schrödinger-yhtälöiden tuloksista [9], joissa esiintyy samantyyppisiä ongelmia.

Kolmas tulos koskee alueen Ω reunan säännöllisyyttä. Jos reuna on epäsäännöllinen, inversio-ongelmassa riittää monesti määrittää kerroinfunktion arvot reunalla $\partial\Omega$, ja tämän jälkeen ongelma palautuu sileän reunan tilanteeseen. Sileässä tapauksessa reuna-arvojen määrääminen onnistuu taas pseudodifferentiaalioperaattorien avulla: reunamittausoperaattori $\Lambda_{A,V}$ osoittautuu tällaiseksi operaattoriksi, ja A:n reuna-arvot voidaan määrittää $\Lambda_{A,V}$:n symbolista. Tämän todistivat Nakamura, Sun ja Uhlmann [14]. Epäsileällä reunalla tekniikka ei enää suoraan toimi, mutta reuna-arvot pystytään silti määrittämään.

Lause 3. [3] Jos Ω:n reuna on C^1 (ts. $\partial\Omega$ voidaan lokaalisti esittää jatkuvasti derivoituvan funktion graafina), niin $\Lambda_{A,V}$ määrää A:n tangentiaaliset komponentit reunalla.

Mittainvarianssi (3) osoittaa, että vain A:n tangentiaaliset komponentit voivat määräytyä $\Lambda_{A,V}$:sta. Lauseen 3 todistuksessa kerrointen reuna-arvot saadaan määrättyä käyttämällä tietynlaisia, annettuun reunapisteeseen keskittyviä CGO-ratkaisuja, jotka oskilloivat vahvasti reunalla. Magneettisessa tapauksessa tarvitaan ratkaisujen pisteittäisiä arvioita, jotka osoitetaan käyttämällä Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktiotekniikkaa ja Jerisonin ja Kenigin [8] teoriaa harmonisille funktioille epäsileissä alueissa.

Viimeinen tulos koskee tilannetta, jossa reunamittaukset tehdään reunan osajoukolla $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Tilanne on luonteva esimerkiksi Calderónin ongelmassa, sillä yleensä koko tutkittavaa kehon osaa ei voi peittää elektrodeilla. Osittaisten mittausten ongelmassa on viime vuosina tapahtunut merkittävää edistystä, kun Kenig, Sjöstrand ja Uhlmann [10] osoittivat, että sähkövirtamittaukset pienessä osajoukossa Γ riittävät johtavuuden määrittämiseen (jännitettä tosin täytyy syöttää suuremmassa joukossa). Todistus toi uusia menetelmiä muihinkin ongelmiin, ja osoitti ruotsalaisen Torsten Carlemanin mukaan nimettyjen *Carleman-painofunktioiden* keskeisen aseman inversio-ongelmissa.

Seuraava lause sanoo, että mittaukset pienellä reunan osajoukolla $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ riittävät myös yleisille magneettisille operaattoreille.

Lause 4. [11] Olkoot A_1 ja A_2 Hölder-jatkuvia. Jos $\Lambda_{A_1,V_1} f|_\Gamma = \Lambda_{A_2,V_2} f|_\Gamma$ kaikille reuna-arvoille f, niin tällöin $dA_1 = dA_2$.

Tässä Γ on "pieni" siinä mielessä, että jos Ω on esimerkiksi konveksi, niin mielivaltaisen pieni joukko riittää. Dos Santos Ferreira, Kenig, Sjöstrand ja Uhlmann [5] todistivat tuloksen riittävän säännöllisille vektorikentille A_1, A_2. Hölder-jatkuvassa tapauksessa tapahtuu tietyssä mielessä sama ilmiö kuin Astalan ja Päivärinnan todistuksessa Calderónin konjektuurille: CGO-ratkaisut käyttäytyvät huonosti, jos kertoimet eivät ole riittävän säännöllisiä. Nyt kuitenkin artikkelien [5], [10] Carleman-tekniikat voidaan yhdistää Nakamuran ja Uhlmannin pseudodifferentiaalimenetelmään, ja Lause 4 voidaan todistaa myös Hölder-jatkuville kertoimille.

5. Avoimia ongelmia

Kuten yllä nähtiin, Schrödinger-yhtälön inversio-ongelmista tapauksessa $n \geq 3$ tiedetään jo paljon. Käsitellään lopuksi muutamia kysymyksiä, joiden vastausta ei tunneta.

Calderónin ongelman L^∞-johtavuuksille ratkaisivat siis Astala ja Päivärinta kahdessa ulottuvuudessa. Jos $n \geq 3$, tiedetään, että reunamittaukset Λ_γ määräävät johtavuuden γ, jos γ:lla on tietyssä mielessä $3/2$ derivaattaa [17]. Seuraava kysymys, jossa johtavuudet oletetaan vain jatkuvasti derivoituviksi, oli alkuperäinen väitöskirjaongelmani.

Avoin ongelma 1. Olkoon $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ rajoitettu avoin joukko, jolla on C^∞-reuna, ja $n \geq 3$. Olkoon $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(\overline{\Omega})$, ja $\gamma_1(x) \geq c$, $\gamma_2(x) \geq c$ jollekin $c > 0$. Olkoon $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$. Osoita, että $\gamma_1 = \gamma_2$.

Tapauksessa $n = 2$ Schrödinger-yhtälö on osoittautunut vaikeammaksi kuin Calderónin ongelma. Edes hyvin säännöllisen sähköisen potentiaalin yksikäsitteistä määräytymistä reunamittauksista ei tiedetä.

Avoin ongelma 2. Olkoon $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ rajoitettu avoin joukko, jolla on C^∞-reuna. Olkoot $V_1, V_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, ja $\Lambda_{0,V_1} = \Lambda_{0,V_2}$. Osoita, että $V_1 = V_2$.

Seuraava ongelma liittyy tapaukseen, jossa johtavuus on *anisotrooppinen*, eli γ riippuu paikan lisäksi myös suunnasta. Tällöin funktio $\gamma(x)$ korvataan symmetrisellä matriisilla $\gamma(x) = (\gamma^{jk}(x))$, ja tarkastellaan yhtälöä

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma^{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Oletetaan elliptisyysehto: jollekin $c > 0$ pätee $\sum_{j,k=1}^n \gamma^{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq c|\xi|^2$ kun $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Voidaan määritellä reunamittaukset

$$\Lambda_\gamma : f \mapsto \sum_{j,k=1}^{n} \gamma^{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\nu_k(x),$$

missä u toteuttaa anisotrooppisen johtavuusyhtälön reuna-arvoilla $u|_{\partial\Omega} = f$. Anisotrooppisessa tapauksessa koko johtavuusmatriisia (γ^{jk}) ei voida määrätä reunamittauksista Λ_γ, vaan pätee diffeomorfismi-invarianssi: $\Lambda_{\psi_*\gamma} = \Lambda_\gamma$, missä $\psi : \Omega \to \Omega$ on diffeomorfismi, joka jatkuu reunalle siten että $\psi|_{\partial\Omega} = \mathrm{id}$. Tässä $\psi_*\gamma$ on matriisin γ pushforward. Seuraava tulos tunnetaan jos $n = 2$ [1], [13], mutta tapaus $n \geq 3$ lienee alan merkittävimpiä avoimia ongelmia.

Avoin ongelma 3. Olkoon $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ rajoitettu avoin joukko, jolla on C^∞-reuna, ja $n \geq 3$. Olkoot γ_1, γ_2 matriiseja, joiden alkiot ovat $C^\infty(\overline{\Omega})$-funktioita ja jotka toteuttavat elliptisyysehdon. Olkoon $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$. Osoita, että $\gamma_2 = \psi_*\gamma_1$ jollekin diffeomorfismille $\psi : \Omega \to \Omega$ jolle $\psi|_{\partial\Omega} = \mathrm{id}$.

Liite. Differentiaaliyhtälöistä

Sähkön johtumista voidaan kuvata differentiaaliyhtälöillä. Aloitetaan näiden alkeista. Mainittakoon, että tässä artikkelissa käsitellään vain *lineaarisia* yhtälöitä. Inversio-ongelmissa mittaukset riippuvat tutkittavista ominaisuuksista kuitenkin yleensä epälineaarisesti, ja inversio-ongelmat lineaarisillekin yhtälöille ovat haastavia. Epälineaaristen yhtälöiden inversio-ongelmista tiedetään vain vähän, ja niihin liittyy kiinnostavia kysymyksiä.

Jo Newtonin ajoista tiedetään, että toisen kertaluvun derivaatat ovat hyödyllisiä monien ilmiöiden kuvaamisessa. Kun tutkitaan moniulotteisia kappaleita (kuten ihmiskehoa), niin toisen kertaluvun derivaattoja on monenlaisia: jos u on funktio $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, niin $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ $(1 \leq j, k \leq n)$ käyvät. Eräs hyödyllinen "toisen kertaluvun derivaatta" on Laplace-operaattori Δ, joka määritellään

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x).$$

Laplace-yhtälöllä $-\Delta u(x) = 0$ voidaan kuvata tasapainotilassa olevaa sähköistä jännitepotentiaalia tai lämpöjakaumaa.

Tarkastellaan epähomogeenista Laplace-yhtälöä

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Kun oikea puoli $f(x)$ on annettu, halutaan löytää (eräs) ratkaisu $u(x)$. Tämä onnistuu palauttamalla differentiaaliyhtälö *algebralliseen* yhtälöön, joka on helpompi ratkaista. Sopiva työkalu tähän tarkoitukseen on Fourier-muunnos.

Fourierin ajatus oli, että funktiot on monesti hyödyllistä kirjoittaa yksinkertaisten peruskomponenttien summana. Tarkemmin, riittävän säännöllinen funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ voidaan kirjoittaa peruskomponenttien $e^{ix\cdot\xi}$ jatkuvana summana (=integraalina), missä $\xi \in \mathbf{R}^n$ on taajuus. Jos $n = 1$, niin $e^{ix\xi} = \cos(\xi x) + i \sin(\xi x)$ on taajuudella $\xi \in \mathbf{R}$ värähtelevien sini- ja kosinifunktioiden yhdistelmä.

Riittävän säännöllisen funktion f Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

ja f voidaan kirjoittaa peruskomponenttien $e^{ix\cdot\xi}$ integraalina käyttämällä käänteistä Fourier-muunnosta

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Fourier-muunnos muuntaa derivaatat polynomeilla kertomiseksi: on helppo nähdä, että $(\frac{\partial f}{\partial x_j})\hat{}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$. Ottamalla epähomogeenisen Laplace-yhtälön molempien puolien Fourier-muunnokset saadaan (ainakin formaalisti)

$$\begin{aligned}
& & -\Delta u(x) &= f(x) \\
&\Longrightarrow & |\xi|^2 \hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\
&\Longrightarrow & \hat{u}(\xi) &= \tfrac{1}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi) \\
&\Longrightarrow & u(x) &= (2\pi)^{-n} \textstyle\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \tfrac{1}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, d\xi. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Askeleet voidaan perustella, ja viimeinen rivi antaa ekplisiittisen kaavan yhtälön $-\Delta u = f$ ratkaisulle.

Monesti differentiaaliyhtälöitä käsitellään rajoitetuissa alueissa (kuten ihmisen keho tai maapallo). Tällöin voidaan tutkia reuna-arvo-ongelmaa

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega\text{:ssa,} \\ u = g & \partial\Omega\text{:lla.} \end{cases}$$

Tässä $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ on rajoitettu avoin joukko, jonka reunalle $\partial\Omega$ tehdään monesti sileysoletuksia. Sanotaan, että reuna on C^∞ (tai C^k), jos $\partial\Omega$ voidaan jokaisen pisteen lähellä esittää jonkin C^∞-funktion (tai C^k-funktion), ts. mielivaltaisen monta kertaa (tai k kertaa) jatkuvasti derivoituvan funktion graafina.

Reuna-arvo-ongelman ratkaisu onnistuu myös Fourier-muunnoksen avulla, sillä ongelma voidaan muuntaa muotoon

$$-\Delta u = \tilde{g}\, dS \qquad \mathbf{R}^n\text{:ssä,}$$

missä $\tilde{g}$ on funktio $\partial\Omega$:lla, ja dS on reunan $\partial\Omega$ pintamitta (ts. Hausdorff-mitta, joka tässä tapauksessa voidaan myös määritellä alkeisgeometrisesti). Ratkaisemalla tämä yhtälö Fourier-muunnoksen avulla saadaan funktio u, jolle pätee $-\Delta u = 0$ Ω:ssa ja jonka arvot $\partial\Omega$:lla riippuvat $\tilde{g}$:n valinnasta. Osoittautuu, että $\tilde{g}$ voidaan valita tietyn reunalla $\partial\Omega$ määritellyn integraaliyhtälön ratkaisuna, ja näin saadaan $u = g$ reunalla $\partial\Omega$. Tätä kutsutaan *kerrospotentiaalimenetelmäksi.*

Laplace-yhtälöllä $-\Delta u = 0$ voidaan kuvata vain tilanteita, joissa tutkittavan objektin ominaisuudet ovat täsmälleen samat jokaisessa pisteessä. Realistisissa tilanteissa (kuten ihmisen keho tai maapallo) ominaisuudet vaihtelevat eri pisteissä, ja tällöin $-\Delta$ voidaan korvata ei-vakiokertoimisella operaattorilla P, joka määritellään

$$Pu(x) = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x).$$

Voidaan olettaa, että a_{jk} ovat C^∞-funktioita tarkasteltavassa alueessa, että $a_{jk} = a_{kj}$, ja että kertoimet toteuttavat elliptisyysehdon: jollekin $c > 0$

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq c|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n,\ \text{kaikilla } x.$$

Siis matriisi $(a_{jk}(x))$ on symmetrinen ja positiividefiniitti kaikilla x. Elliptisyysehto takaa sen, että operaattori P käyttäytyy jokseenkin samalla tavalla kuin $-\Delta$.

Halutaan ratkaista elliptinen yhtälö

$$Pu = f$$

alueessa Ω tai $\mathbf{R}^n$:ssä. Tähän on useita tapoja, joita esitellään mm. kirjassa Gilbarg-Trudinger [6]. Toisin kuin yllä, Fourier-muunnos ei näyttäisi olevan kovin hyödyllinen ei-vakiokertoimisen yhtälön ratkaisemisessa, sillä lausekkeen $Pu(x)$ Fourier-muunnoksessa kertoimet a_{jk} jäävät muunnoksen sisälle.

Fourier-tekniikoita on kuitenkin mahdollista käyttää myös tässä tapauksessa. Yksinkertainen lasku, jossa funktio u kirjoitetaan käänteisen Fourier-muunnoksen avulla, osoittaa, että

$$\begin{aligned} Pu(x) &= P[(2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi] = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} P(e^{ix\cdot\xi})\hat{u}(\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

missä $p(x,\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k$ on operaattorin P *symboli*. Analogisesti kaavan (4) kanssa, yhtälön $Pu = f$ ratkaisua voitaisiin hakea muodossa $u(x) = Qf(x)$, missä

$$Qf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \frac{1}{p(x,\xi)} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Tässä Q on *pseudodifferentiaalioperaattori*. Osoittautuu, että $u = Qf$ ei ole yhtälön $Pu = f$ tarkka ratkaisu, mutta lähellä sellaista. Oleellista on, että tälle likimääräiselle ratkaisulle on eksplisiittinen lauseke, ja oikean ratkaisun monet ominaisuudet (esimerkiksi ns. singulariteetit) nähdään tästä tai vastaavista lausekkeista.

Yleisesti, pseudodifferentiaalioperaattori (PDO) on operaattori A muotoa

$$Af(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

missä symboli $a(x,\xi)$ voi olla varsin yleinen, ξ-muuttujan polynomien tai niiden käänteisfunktioiden tavalla käyttäytyvä objekti. PDO:t muodostavat laajan operaattoriluokan, joka sisältää lineaariset differentiaalioperaattorit ja elliptisten yhtälöiden likimääräiset ratkaisuoperaattorit. Erityisen käyttökelpoisen luokasta tekee *PDO-kalkyyli*: kahden PDO:n yhdistetty operaattori on edelleen PDO, ja PDO:t ovat jatkuvia operaattoreita L^2-pohjaisissa avaruuksissa. Vastaavan kalkyylin voi määritellä myös monistoilla, ja se tarjoaa luonnollisen asetelman mm. Atiyahin ja Singerin indeksiteorialle. PDO-menetelmien kattava lähde on Hörmander [7].

PDO-teoriaa voidaan pitää Fourier-tekniikoiden yleistyksenä ei-vakiokertoimisille yhtälöille. Toisaalta teoria tarjoaa joustavan operaattoriluokan, jota voidaan hyödyntää matemaattisessa analyysissä silloin kun muut operaattorit loppuvat kesken. Lisäksi PDO:t mahdollistavat ns. *mikrolokaalin* lähestymistavan. Sen sijaan, että funktioita ja yhtälöitä tarkasteltaisiin vain x-muuttujan suhteen, tai että otettaisiin Fourier-muunnos ja suoritettaisiin analyysi ξ-puolella, nyt voidaankin käsitellä x- ja ξ-muuttujia *yhtäaikaa*. Tämä yksinkertainen ajatus on osoittautunut vahvaksi työkaluksi differentiaaliyhtälöiden teoriassa, ja mikrolokaali ajatustapa on ollut erittäin hyödyllinen monien inversio-ongelmien tutkimuksessa.

Viitteet

[1] K. Astala, M. Lassas, and L. Päivärinta, *Calderón's inverse problem for anisotropic conductivity in the plane*, Comm. PDE **30** (2005), 207–224.

[2] K. Astala and L. Päivärinta, *Calderón's inverse conductivity problem in the plane*, Ann. of Math. **163** (2006), 265–299.

[3] R. M. Brown and M. Salo, *Identifiability at the boundary for first-order terms*, Appl. Anal. **85** (2006), no. 6-7, 735–749.

[4] A. P. Calderón, *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matemática, Río de Janeiro, 1980.

[5] D. Dos Santos Ferreira, C. E. Kenig, J. Sjöstrand, and G. Uhlmann, *Determining a magnetic Schrödinger operator from partial Cauchy data*, Comm. Math. Phys. (to appear), arXiv:math.AP/0601466.

[6] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, revised third ed., Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[7] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vol. I-IV, Springer-Verlag, Berlin, 1983-1985.

[8] D. Jerison and C. Kenig, *Boundary value problems on Lipschitz domains*, Studies in partial differential equations (Walter Littman, ed.), MAA Studies in Mathematics, no. 23, Mathematical Association of America, 1982, pp. 1–68.

[9] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations*, Invent. Math. **134** (1998), 489–545.

[10] C. E. Kenig, J. Sjöstrand, and G. Uhlmann, *The Calderón problem with partial data*, Ann. of Math. (to appear), arXiv:math.AP/0405486.

[11] K. Knudsen and M. Salo, *Determining nonsmooth first order terms from partial boundary measurements*, Inverse Problems and Imaging (to appear), arXiv:math.AP/0609133.

[12] A. Nachman, *Reconstructions from boundary measurements*, Ann. of Math. **128** (1988), 531–587.

[13] ———, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. of Math. **143** (1996), 71–96.

[14] G. Nakamura, Z. Sun, and G. Uhlmann, *Global identifiability for an inverse problem for the Schrödinger equation in a magnetic field*, Math. Ann. **303** (1995), 377–388.

[15] G. Nakamura and G. Uhlmann, *Global uniqueness for an inverse boundary problem arising in elasticity*, Invent. Math. **118** (1994), 457–474.

[16] P. Ola, L. Päivärinta, and E. Somersalo, *An inverse boundary value problem in electrodynamics*, Duke Math. J. **70** (1993), 617–653.

[17] L. Päivärinta, A. Panchenko, and G. Uhlmann, *Complex geometrical optics solutions for Lipschitz conductivities*, Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), no. 1, 57–72.

[18] L. Pestov and G. Uhlmann, *Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid*, Ann. of Math. **161** (2005), 1093–1110.

[19] M. Salo, *Semiclassical pseudodifferential calculus and the reconstruction of a magnetic field*, Comm. PDE (to appear), arXiv:math.AP/0602290.

[20] ———, *Inverse problems for nonsmooth first order perturbations of the Laplacian*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. **139** (2004), 67 pp.

[21] J. Sylvester and G. Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math. **125** (1987), 153–169.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
E-mail address: mikko.salo@helsinki.fi