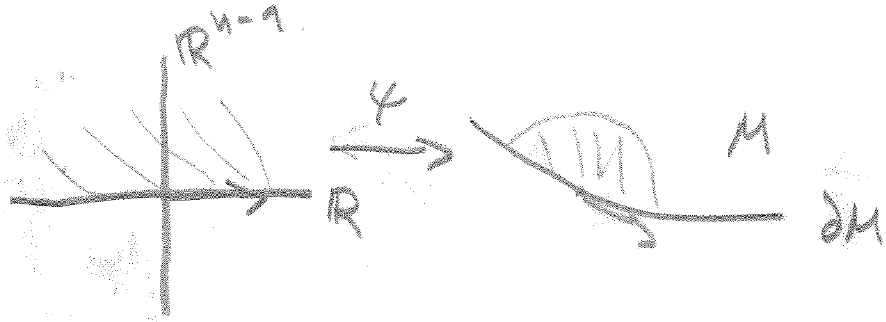
METRIIKAN JA SEN NORMAALIDERIVAATTOJEN MÄÄRÄÄMINEN REUNALLA

I REUNA-EKSPONENTTIKUVAUS

kompakti

Olk. M yhtenäinen reunallinen (∂M) Riem. monisto.

s.o. kartat



$T_p\partial M$: $\quad p \in \partial M \quad (p = \varphi(x,0))$

$$T_p\partial M = \{ d\varphi_p(v) : v \in \mathbb{R}^n, v_n = 0 \} \subset T_pM$$

$$d\varphi_p(v)f = v(f\circ\varphi)(x) = v\cdot\nabla(f\circ\varphi)(x)$$

$p = \varphi(x)$

Normaali: $n(p) \in T_pM$ normaali (∂M:lle) jos

$$\langle n(p), v\rangle_g = 0 \quad \forall v \in T_p\partial M$$

$\mathrm{Exp}_{\partial M}$:

$$\exp_{\partial M}(p,t) := \exp_p(t\,n(p)), \quad p \in \partial M, \; t > 0 \text{ (pieni)}$$

$n(p)$ yksikkösisänormaali (yksikäs!)

<u>Pätee:</u> $\exists\, \tau > 0$ s.e.

$$\exp_{\partial M} : \partial M \times [0, \tau) \to M$$

määritelty & diffeomorfinen kuvalleen.

Tod: - pätee lokaalisti

- kompaktisuus $\Rightarrow$ pätee globaalisti. $\square$

<u>Lemma</u> <u>Olk.</u> g, g' metriikoita M:llä.

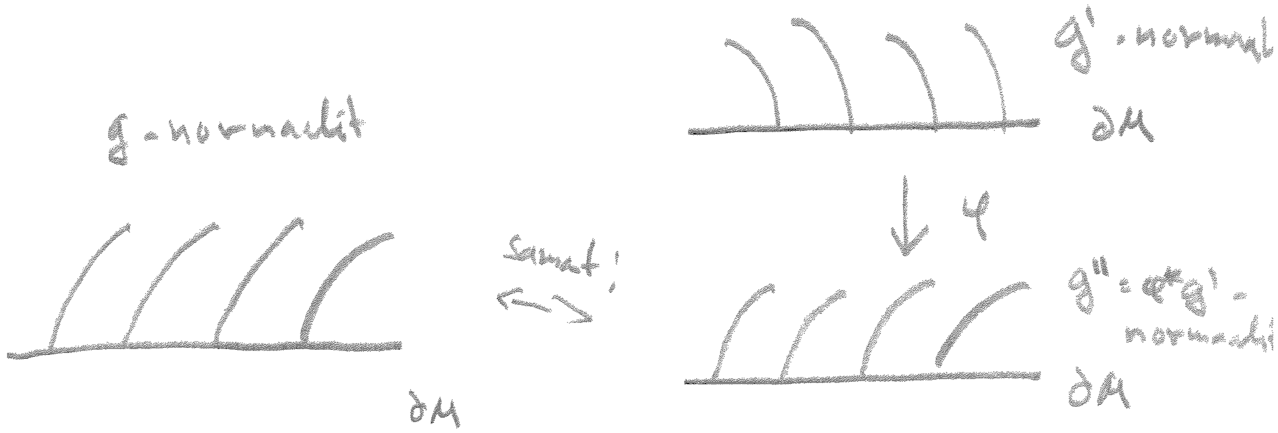
<u>VÄ:</u> $\exists\, \varphi : M \to M$ diffeomorf., $\varphi|_{\partial M} = \mathrm{id}$, s.e. metriikalle $g'' = \varphi^* g'$ $\Big|$ $\langle d\varphi(v), d\varphi(w) \rangle_{g''} = \langle v, w \rangle_{g'}$

(1) $$\exp_{\partial M}(p, \ell) = \exp''_{\partial M}(p, \ell), \quad p \in \partial M, \ 0 \le \ell \le \ell_0$$

jollakin $\ell_0 > 0$.

<u>Huom:</u> a) Lemmassa <u>EI</u> edes mainita mitään reunakuvausta!

Sanoma on, että g' void "vääntää" aina niin, että NORMAALIT yhtyvät (reunan lähellä):

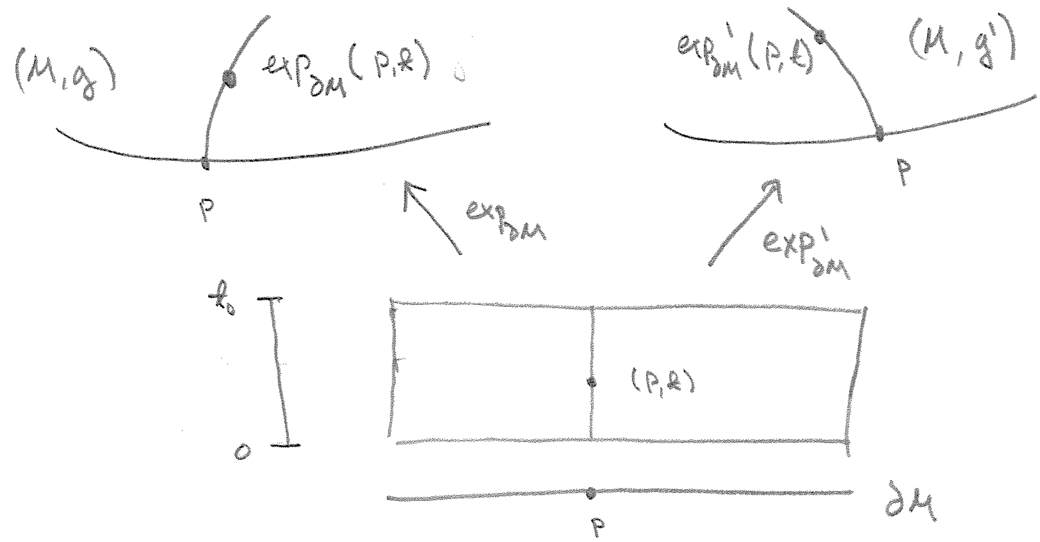


b) $n' \perp T_p \partial M$ & $n'' = d\varphi(n') \Rightarrow \forall\, v \in T_p \partial M$:

$$\Rightarrow \langle n'', v \rangle_{g''} = \langle d\varphi(n'), d\varphi(v) \rangle_{\varphi^* g'} = \langle n', v \rangle_{g'} = 0.$$

c) Jos $v \in T_pM$, $v \nparallel n(p)$, niin g- ja g''-geodeeseista ei (1) kerro mitään.

TOD:



Valitaan

$$\varphi = \exp_{\partial M} \circ (\exp'_{\partial M})^{-1} \qquad \partial M\text{:n lähellä}$$

(ja jatka diffeomorfismiksi M:lle). Nyt $\varphi|_{\partial M} = id$ ja

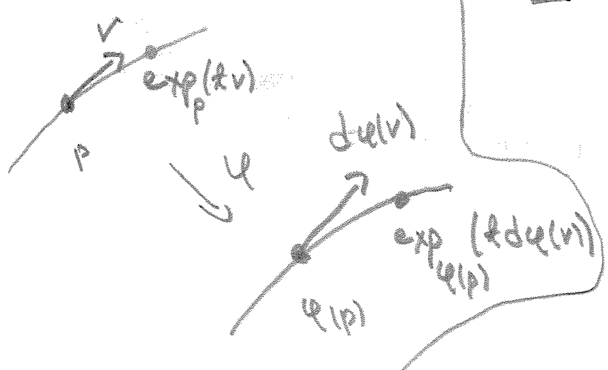
$$\exp''_{\partial M}(p,t) = \exp''_p(t\, n''(p)) = \exp''_{\varphi(p)}(t\, d\varphi(n'(p)))$$

$$= \varphi \circ \exp'_p(t\, n'(p))$$

$$= \varphi \circ \exp'_{\partial M}(p,t)$$

$$= \exp_{\partial M}(p,t) \qquad \text{(reunan } \partial M \text{ lähellä)}$$

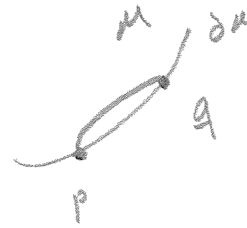
$\varphi: M \to N$



$\varphi \circ \exp_p(tv)$
$= \exp_{\varphi(p)}(t\, d\varphi(v))$
$\uparrow$
indus. metr.
$g_N = \varphi^* g_M$

$\Box$ Lemma

II METRIIKAN MÄÄR. REUNAETÄISYYS FKT:STA



Ol. M kuten edellä. Lisäksi konveksi.

Reunaet. fkt:

$$d_g : \partial M \times \partial M \to \mathbb{R}_+$$

$$d_g(p,q) = \min\{ l(\gamma) : \gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q \ \ \gamma \ \cancel{\text{geod}} \}$$

$$\uparrow \quad l(\gamma) = \int_0^1 \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle_{g(\gamma(t))}^{1/2} \, dt$$

LAUSE Ol. g ja g' s.e. ∂M:n ylössä

$$\exp_{\partial M}(p,t) = \exp'_{\partial M}(p,t).$$

Silloin

$$d_g = d_{g'} \Rightarrow D^\alpha g|_{\partial M} = D^\alpha g'|_{\partial M} \quad \forall \alpha \,!$$

Huom: Riittää tutkia normaaliderivaatat! ($g|_{\partial M} = g'|_{\partial M} \Rightarrow$ tang. derivaatat samat)

tämänkin todistetaan!

Tod: Olk. $p \in \partial M$ ja $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \supset U \to \partial M$, $u \mapsto \psi(u)$ kartta p:n ympäristössä. Koordinaateissa

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \supset U \times [0, t_0) \to M$$
$$(y,z) \mapsto \exp_{\partial M}(\psi(y), z)$$

sekä g että g' muotoa

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g'_{ij} = \begin{pmatrix} g'_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\alpha, \beta = 1, \dots, n-1.$

Määritellään

$$f := g - g' = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} - g'_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_\gamma := \int_0^1 f_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\,dt \qquad \gamma : [0,1] \to M \text{ käyrä}$$

$$= \int_0^1 \left(\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle_g - \langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle_{g'}\right)dt.$$

Olk. $p_0, q_0 \in \partial M$ ja γ g-geod & γ' g'-geodeesi $p_0 \to q_0$.

Nyt

$$F_\gamma = \underbrace{\int_0^1 |\dot\gamma|_g^2\,dt}_{\substack{= |\dot\gamma(0)|_g^2 = d_g(p_0,q_0)^2 \\ \uparrow\ \gamma \text{ geodeesi} \Rightarrow |\dot\gamma(t)|_g \equiv \text{vakio}}} - \overbrace{\int_0^1 |\dot\gamma|_{g'}^2\,dt}^{\geq \left(\int_0^1 |\dot\gamma|_{g'}\,dt\right)^2 \geq d_{g'}(p_0,q_0)^2} \leq 0$$

ja

$$F_{\gamma'} \geq 0.$$

Siis

$$(2) \quad \begin{cases} g\text{-geodeesille } \gamma & F_\gamma \leq 0 \\ g'\text{-geod. } \gamma' & F_{\gamma'} \geq 0. \end{cases}$$

Todistetaan induktiolla

$$(3) \qquad \left.\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\right|_{z=0} = 0.$$

k=0: (Antideesi) Olk. $p_0 \in \partial M$ ja $\xi_0 \in T_{p_0}\partial M$ $(|\xi_0|=1)$ s.e.

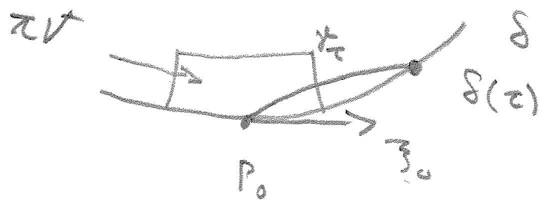
(AT) $$f_{\alpha\beta}(p_0)\,\xi_0^\alpha \xi_0^\beta \neq 0 \quad (>0 \text{ esim.}).$$

$f_{\alpha\beta}$ jva $\Rightarrow$ $\exists$ (p_0,ξ_0):n ympärist$\ddot{\text{o}}$ $V \subset TM$ s.e.

(AT2) $$f_{\alpha\beta}(p)\,\xi^\alpha \xi^\beta > 0 \qquad \forall\, (p,\xi) \in V.$$

Olk. $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial M$ käyrä s.e.

$$\delta(0) = p_0, \quad \dot\delta(0) = \xi_0.$$



Olk. $\gamma : [0,1] \to M$ minimoiva g-geodeesi $p_0 \to \delta(\tau)$.

Huom: V void. olettaa ξ-kartioksi, sillä $(p,\xi) \in V$, $s>0$

$$\Rightarrow \quad f_{\alpha\beta}(p)\,(s\xi)^\alpha (s\xi)^\beta = s^{\alpha+\beta} f_{\alpha\beta}(p)\,\xi^\alpha \xi^\beta > 0.$$

Kun $\tau > 0$ pieni, niin

$$(\gamma_\tau(t), \dot\gamma_\tau(t)) \in V \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

$$\left[\, (\gamma_\tau(0), \dot\gamma_\tau(0)) \xrightarrow[\tau\to 0]{} (p_0, \xi_0) \,\right]$$

Tällöin

$$F\gamma_\tau = \int_0^1 \overbrace{f_{ij}(\gamma_\tau(t))\,\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\,dt}^{>0} > 0. \; \lightning \; (2).$$

<u>INDUKTIO:</u> ol.

$$\left.\frac{\partial^l f_{\alpha\beta}}{\partial z^l}\right|_{z=0} = 0, \quad l = 0, \dots, k-1.$$

Kuten edellä, $\exists\ p_0 \in \partial M$, $\xi_0 \in T_{p_0}\partial M$ (void. ol. $|\xi_0|_g = 1$) s.e.

$$(AT)_k \qquad \delta := \frac{\partial^k f_{\alpha\beta}}{\partial z^k}(p_0)\,\xi_0^\alpha \xi_0^\beta > 0.$$

Taylor $\Rightarrow$ (ind. oletus!)

$$f_{\alpha\beta}(y,z) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f_{\alpha\beta}}{\partial z^k}(y,0)\,z^k + z^k\,\mathcal{O}_{\alpha\beta}(z).$$

Olk. δ_τ, γ_τ kuten edellä. Nyt

$$F\gamma_\tau = \int_0^1 f_{\alpha\beta}(\gamma_\tau(t))\,\dot\gamma_\tau^\alpha(t)\dot\gamma_\tau^\beta(t)\,dt$$

$|\dot\gamma_\tau(t)|_g$ = vakio!

$$= \frac{1}{|\dot\gamma_\tau(0)|_g^2}\int_0^1 f_{\alpha\beta}(\gamma_\tau(t))\,\xi_\tau^\alpha(t)\xi_\tau^\beta(t)\,dt$$

$$\xi_\tau(t) := \frac{\dot\gamma_\tau(t)}{|\dot\gamma_\tau(t)|_g}$$

HUOM: konveksisuus tässä käytössä: $\gamma_\tau^z > 0$

merk. $\gamma_\tau = (\gamma_\tau^y, \gamma_\tau^z)$

$$= \frac{1}{|\dot\gamma_\tau(0)|_g}\int_0^1 \gamma_\tau^z(t)^k \underbrace{\left(f_{\alpha\beta}(\gamma_\tau^y(t),0)\,\xi_\tau^\alpha(t)\xi_\tau^\beta(t) + \mathcal{O}_{\alpha\beta}(\gamma_\tau^z(t))\,\xi_\tau^\alpha(t)\xi_\tau^\beta(t)\right)}_{=:(*)} dt$$

Kuten edellä, $\exists\ (p_0,\xi_0)$:n ympäristö V s.e.

$$(AT2)_k \qquad \frac{\partial^k f_{\alpha\beta}}{\partial z^k}(p)\,\xi^\alpha\xi^\beta > \frac{\delta}{2}, \quad \text{kun } (p,\xi) \in V.$$

Valitaan $\tau > 0$ niin pieneksi, että $\forall\, t \in [0,1]$:

$$\left((\gamma_\tau^y(t),0),\ \xi_\tau(t)\right) \in V \qquad \underline{\text{JA}} \qquad |\mathcal{O}_{\alpha\beta}(\gamma_\tau^z(t))\,\xi_\tau^\alpha\xi_\tau^\beta| \le \delta/2.$$

Tällöin $(*) > 0$ $\lightning$ (2). $\square$