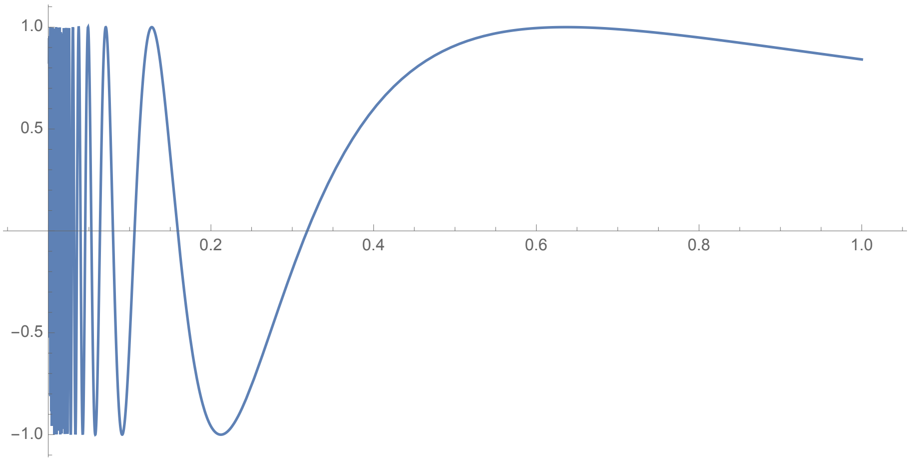
Metriset avaruudet ja Topologia



Jouni Parkkonen

Luentoja Jyväskylän yliopistossa syksyllä 2018

Sisältö

Lukijalle

Tämä teksti on kurssimateriaali metristen avaruuksien (Osa I) ja topologian (Osa II) kursseille syyslukukaudella 2018.

Metristen avaruuksien kurssi on nimensä mukaisesti johdatus metristen avaruuksien teoriaan. Peruskäsitteiden (metriikka, jatkuvuus jne.) jälkeen tutustumme täydellisiin, kompakteihin ja yhtenäisiin metrisiin avaruuksiin.

Topologian kurssilla tarkastelemme samoja kysymyksiä kuin Osassa I mutta nyt tarkasteltavassa avaruudessa ei välttämättä ole määritelty etäisyysfunktiota. Sen sijaan tarkasteltavissa avaruuksissa on avoimien joukkojen kokoelma, jota kutsutaan topologiaksi. Topologian kurssilla todistetaan joitakin edistyneempiä metristen avaruuksien tuloksia kuten Bairen lause ja Arzelàn ja Ascolin lause. Topologian kurssin huipentumana tarkastelemme yleisten tuloavaruuksien topologiaa ja todistamme Tihonovin lauseen, jonka mukaan kompaktien avaruuksien tulo on kompakti.

Hyviä lähteitä itseopiskeluun ovat esimerkiksi [Väi2], [Pit] [SV], [Väi1].

Kansikuva: Topologin sinikäyrä on yhtenäinen mutta ei polkuyhtenäinen.

Merkintöjä

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioiden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.
- $A \sqcup B$ on joukkojen A ja B erillinen yhdiste. Merkintä tarkoittaa joukkoa $A \cup B$ lisätiedolla, että $A \cap B = \emptyset$.

- $f|_A$ kuvauksen $f\colon X \to Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.
- $\mathscr{F}(X,Y) = \{f\colon X \to Y\}$ kaikkien kuvausten $f\colon X \to Y$ joukko.
- $\operatorname{raj}(X,\mathbb{R})$ rajoitettujen funktioiden $f\colon X \to \mathbb{R}$ avaruus.
- $\mathrm{C}^0(I,\mathbb{R})$ jatkuvien funktioiden $f\colon X \to \mathbb{R}$ avaruus.
- $\mathrm{C}^0(X,Y)$ jatkuvien kuvausten $f\colon X \to Y$ avaruus, kun X ja Y ovat metrisiä tai topologisia avaruuksia.
- $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A,\ \text{jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.
- $A \subsetneq B$ joukko A on joukon B aito osajoukko: $A \subset B$ ja $A \neq B$.
- $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{jos } m = n \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$.

Uusien käsitteiden määritelmät on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Osa I

Metriset avaruudet

Luku 1

Metriset avaruudet

1.1 Määritelmä ja esimerkkejä

Metriikka eli etäisyysfunktio on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ määräämällä avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d_{\mathbb{E}}(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

on.

Olkoon $X \neq \emptyset$.[a] Kuvaus $d\colon X \times X \to [0,\infty[$ on etäisyysfunktio eli metriikka joukossa X, jos sillä on seuraavat ominaisuudet

(1) $d(x,y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys), ja

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on metrinen avaruus.

[a] Väisälä sallii tässä myös tyhjän joukon ja mikäpä siinä.

Harjoituksissa osoitetaan, että metrisessä avaruudessa (X, d) pätee käänteinen kolmioepäyhtälö: kaikille $x, y, z \in X$ pätee

$$\left|d(x,z) - d(z,y)\right| \leq d(x,y)\,.$$

Esimerkki 1.1. Euklidinen metrinen avaruus

$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2)\,.$$

Metriikan d_2 positiivisuus ja symmetrisyys ovat selviä määrittelevän lausekkeen perusteella. Kolmioepäyhtälö lienee todistettu aiemmilla kursseilla ja seuraa myöhemmin osoitettavasta Propositiosta 1.7.

Esimerkki 1.2 (Diskreetti metriikka). Olkoon X epätyhjä joukko. Diskreetti metriikka δ joukossa X määritellään asettamalla

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \neq b \\ 0, & \text{jos } a = b\,. \end{cases}$$

Pari (X,d) on diskreetti metrinen avaruus. Metriikan ominaisuudet (1) ja (2) ovat selviä. Tarkastellaan kolmioepäyhtälöä tapauksessa, jossa x, y ja z ovat kaikki eri pisteitä. Tällöin

$$\delta(x,y) = 1 \leq 2 = 1 + 1 = \delta(x,z) + \delta(z,y)\,.$$

On helppo tarkastaa, että jos joukossa $\{x,y,z\} \subset X$ on korkeintaan kolme pistettä, kolmioepäyhtälössä pätee yhtäsuuruus.

Esimerkki 1.3 (Ranskan rautatieavaruus). Lauseke[1]

$$d_{\text{SNCF}}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{, kun } x \text{ ja } y \text{ ovat lineaarisesti riippuvia} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$. Avaruutta $(\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$ kutsutaan Ranskan rautatieavaruudeksi. Tässä origo ajatellaan Pariisiksi ja kaikki radat ovat Pariisista maakuntiin johtavia säteitä. Jos kaupungit eivät ole samalla säteellä, niiden välillä voi matkustaa junalla vain Pariisin kautta.

Olkoon (X,d) metrinen avaruus. On helppo tarkastaa, että jos $A \subset X$, ei ole tyhjä joukko, niin $(A, d|_{A\times A})$ on metrinen avaruus.

Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Joukon A metriikka $d|_{A\times A}$ on metrisen avaruuden X indusoima metriikka joukossa A.

Käytämme indusoidulle metriikalle usein samaa merkintää kuin ympäröivän avaruuden X metriikalle.

Esimerkki 1.4 ($\mathbb{S}^n$). Euklidisen avaruuden yksikköpallo on

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}\,.$$

Koska S^{n-1} on epätyhjä joukko, sille voidaan määritellä diskreetti metriikka. Koska S^{n-1} on ympäröivän euklidisen avaruuden epätyhjä osajoukko, sillä on euklidisen avaruuden indusoima metriikka, jossa kahden ympyrän pisteen etäisyys on niitä yhdistävän jänteen euklidinen pituus. Esimerkissä 1.3 käsitellyn metriikan rajoittuma joukkoon S^2 on diskreetti metriikka $2\,\delta$.

Neljäs metriikka, joka on usein luonnollisin, on

kulmametriikka,

$$\measuredangle(x,y) = \arccos(x|y)\,,$$

missä $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$.

[1] SNCF, Société nationale des chemins de fer français, on Ranskan valtion rautatieyhtiö.

Osoitetaan ympyrän tapauksessa, että tämä todella on metriikka. Ainoa seikka, joka vaatii tarkastuksen on kolmioepäyhtälö. Olkoot $A, B, C \in S^1$. Olkoot $a = \arccos(B|C)$, $b = \arccos(A|C)$ ja $c = \arccos(A|B)$. Olkoon $u \in S^1$, $u \perp C$. Nyt $A = C \cos b \pm u \sin b$ ja $B = C \cos a \pm u \sin a$, joten

$$\cos c = (A|B) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b \geq \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)\,.$$

Koska cos on vähenevä funktio välillä $[0, \pi]$, saadaan kolmioepäyhtälö. Korkeammassa ulottuvuudessa todistus on oleellisesti sama mutta tällöin pisteet A, B ja C eivät välttämättä ole samalla ympyrällä, joten vektori u pitää korvata kahdella vektorin $C \in \mathbb{E}^n$ ortogonaalikomplementin alkiolla. Käytämme yleensä kulmametriikkaa pallonpinnalla ja otamme käyttöön merkintäsopimuksen

$$\mathbb{S}^{n-1} = (S^{n-1}, \measuredangle)\,.$$

Esimerkki 1.5. Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) tuloavaruudessa $X \times Y$ on erilaisia "luonnollisia" metriikoita: Jokaiselle $p \geq 1$ määritellään metriikka

$$d_p\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt[p]{d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p}\,.$$

Lisäksi maksimimetriikka

$$d_{\max}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\big(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\big)$$

on myös usein käyttökelpoinen. Harjoitustehtävissä 1.9 ja 1.10 tarkastellaan tapaukset d_1 ja $d_{\max}$. Muihin tapauksiin palataan ainakin funktionaalianalyysissa.

1.2 Normiavaruus

Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Funktio $\|\cdot\| \colon V \to [0, \infty[$ on normi, jos

(1) $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = 0$.

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in V$.

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikille $x, y \in V$.

On helppo tarkastaa, että normille pätee myös käänteinen kolmioepäyhtälö: kaikille $x, y \in V$ pätee

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|\,.$$

Tämän epäyhtälön voi todistaa kuten metriikan vastaavan tuloksen ja toisaalta se seuraa metriikan vastaavasta tuloksesta, koska normi määrittelee metriikan luonnollisella tavalla:

Propositio 1.6. *Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Lauseke*

$$d(x, y) = \|x - y\|\,.$$

määrittelee metriikan avaruudessa X. Metriikka d toteuttaa

$$d(x + v, y + v) = d(x, y)$$

kaikille $x, y, v \in V$.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa suoraan normin määritelmästä. Toinen väite saadaan laskulla

$$d(x+v,y+v) = \|x+v-(y+v)\| = \|x-y\| = d(x,y)\,. \qquad \square$$

Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Kuvaus $(\cdot|\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{R}$ on sisätulo, jos

(1) $(v|v)\geq 0$ kaikille $v\in V$ ja $(v|v)=0$, jos ja vain jos $v=0$,

(2) kuvaus $v\mapsto(v,v_0)$ on lineaarikuvaus kaikille $v_0\in V$,

(3) $(v|w)=(w|v)$ kaikille $v,w\in V$.

Pari $(V,(\cdot|\cdot))$ on sisätuloavaruus.

Propositio 1.7. *Olkoon* $(V,(\cdot\mid\cdot))$ *sisätuloavaruus. Sisätulo määrää normin asettamalla*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}\,.$$

Todistus. Positiivisuus on selvä. Lisäksi kaikille $\lambda\in\mathbb{R}$ pätee

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x\mid\lambda x) = \lambda^2(x\mid x) = \|x\|^2\,.$$

Kolmioepäyhtälö seuraa lineaarialgebrassa todistettavasta Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöstä: Kaikille $x,y\in V$ pätee [2]

$$|(x\mid y)| \leq \|x\|\|y\|\,.$$

Tämän epäyhtälön avulla saamme

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y\mid x+y) &= \|x\|^2+2(x\mid y)+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2\,.\end{aligned} \qquad \square$$

Esimerkki 1.8. Euklidinen normi

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

on normi Proposition 1.7 nojalla.

Muita tärkeitä normeja avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ovat

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n}|x_k|$$

[2] Jos $x,y\in V-\{0\}$ ja $\lambda\in\mathbb{R}$, niin

$$0\leq (x+\lambda y|x+\lambda y) = (x|x)+\lambda(x|y)+\lambda(y|x)+\lambda^2(y|y) = (x|x)+2\lambda(x|y)+\lambda^2(y|y)\,.$$

Valitsemalla $\lambda=-\frac{(x|y)}{(y|y)}$ saadaan $0\leq(x|x)-2\frac{(x|y)}{(y|y)}(x|y)+\frac{(x|y)^2}{(y|y)^2}(y|y) = (x|x)-\frac{(x|y)^2}{(y|y)}$, mistä siistimällä saadaan haluttu epäyhtälö. Jos $(x|y)=\pm\|x\|\|y\|$, niin $\left(\frac{x}{\|x\|}\mp\frac{y}{\|y\|}\mid\frac{x}{\|x\|}\mp\frac{y}{\|y\|}\right)=0$, joten $y=\pm\frac{\|y\|}{\|x\|}x$.

ja yleisemmin

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$$

kun $1 \leq p < \infty$. Normin ominaisuudet (0) ja (1) ovat selviä mutta kolmioepäyhtälöä varten tarvitaan hieman työtä. Tapauksen $1 < p < \infty$ todistus esitetään funktionaalianalyysin kurssilla.

Esimerkki 1.9. Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon

$$\mathrm{raj}(X, \mathbb{R}) = \{f\colon X \to \mathbb{R} : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

joukossa X määriteltyjen rajoitettujen $\mathbb{R}$-arvoisten funktioiden joukko. Avaruuden $\mathbb{E}^1$ kolmioepäyhtälön nojalla $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ on kaikkien funktioiden vektoriavaruuden $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus, joten se on vektoriavaruus. Harjoitustehtävässä 1.13 osoitamme, että funktio $\|\cdot\|_\infty\colon \mathrm{raj}(X, \mathbb{R}) \to [0, \infty[$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{1.1}$$

on normi.

Erikoistapaus rajoitettujen funktioiden avaruudesta on rajoitettujen reaalilukujonojen avaruus

$$\ell^\infty = \{\omega \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)| < \infty\}\,.$$

Lauseke

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)|$$

on normi vektoriavaruudessa ℓ^∞.

Esimerkki 1.10. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Analyysin kursseilla on osoitettu, että kaikki jatkuvat funktiot $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ ovat rajoitettuja. Koska jatkuvien funktioiden summat ja reaaliluvulla kerrotut jatkuvat funktiot ovat jatkuvia, $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ on avaruuden $\mathrm{raj}(I, \mathbb{R})$ aliavaruus. Siksi jatkuvien funktioiden vektoriavaruus $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ varustetaan usein normilla $\|\cdot\|_\infty$. Palaamme tähän esimerkkiin luvussa 6.1.

Propositio 1.11. *Jono $f_k \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$, jos ja vain jos $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, kun $k \to \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.15. □

1.3 Isometria

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on isometrinen upotus, jos kaikille $x, y \in X_1$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) = d_1(x, y)\,.$$

Jos isometrinen upotus on bijektio, niin se on isometria. Jos on isometria $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$, niin metriset avaruudet (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) ovat isometriset.

Lemma 1.12. *Isometrinen upotus on injektio.*

Todistus. Kahden eri pisteen etäisyys ei ole 0. Jos ne kuvautuvat samaksi pisteeksi, niin kuvapisteiden etäisyys on 0, joten kuvaus ei ole isometria. □

Lemma 1.13. *Jos $F\colon (X_1,d_1) \to (X_2,d_2)$ ja $G\colon (X_2,d_2) \to (X_3,d_3)$ ovat isometrisia upotuksia, niin $G\circ F$ on isometrinen upotus. Isometrioiden yhdistetty kuvaus on isometria. Isometrian käänteiskuvaus on isometria.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.18 □

Esimerkki 1.14. Olkoon $b \in \mathbb{R}^n$. Kuvaus $t_b\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $t_b(x) = x + b$ on isometria. Olkoon $k \le n$. Kuvaus $u\colon \mathbb{E}^k \to \mathbb{E}^n$, $u(y) = b + (y, 0)$ on isometrinen upotus.

Esimerkki 1.15. Muistamme lineaarialgebrasta, että $n \times n$-matriisi A on ortogonaalinen, jos sen sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaalin kannan. Ortogonaalinen $n \times n$-matriisi A toteuttaa yhtälön

$$(Ax \mid Ay) = (x \mid y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se määrää isometrian $x \mapsto A\,x$ metrisissä avaruuksissa $\mathbb{E}^n$ ja $\mathbb{S}^{n-1}$. Jos nimittäin $x, y \in \mathbb{E}^n$, niin käyttämällä lineaarisuutta, normin määritelmää ja matriisin A ortogonaalisuutta saadaan

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{E}}(Ax, Ay)^2 &= \|Ax - Ay\|^2 = \|A(x-y)\|^2 = (A(x-y) \mid A(x-y)) \\ &= (x - y \mid x - y) = \|x-y\|^2 = d(x,y)^2 \,. \end{aligned}$$

Koska metriikka ei saa negatiivisia arvoja, väite seuraa tästä. Jos taas $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, niin

$$\measuredangle(Ax, Ay) = \arccos(Ax \mid Ay) = \arccos(x \mid y) = \measuredangle(x,y)\,.$$

Esimerkki 1.16. Olkoon $\exp\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^1$ kuvaus

$$\exp(s) = (\cos s, \sin s)\,.$$

Selvästi exp on surjektio. Lisäksi kaikille $s, t \in \mathbb{E}^1$, joille $|s-t| \le \pi$ pätee

$$\begin{aligned} \measuredangle(\exp(s), \exp(t)) &= \arccos\big((\cos s, \sin s) \mid (\cos t, \sin t)\big) \\ &= \arccos(\cos s \cos t + \sin s \sin t) \\ &= \arccos\cos(s-t) = \arccos(|s-t|) = |s-t|\,. \end{aligned}$$

Siis kuvauksen exp rajoittuma jokaiselle välille, jonka pituus on korkeintaan π, on isometria. Jos taas $\pi < |s-t| < 2\pi$, niin $\arccos\cos(|s-t|) = 2\pi - |s-t|$, joten pidemmillä väleillä kuvaus ei ole isometria. Kuvauksia, jotka ovat isometrioita jokaisen pisteen lähelle rajoitettuna, sanotaan lokaaleiksi isometrioiksi. Palaamme täsmälliseen määritelmään luvussa 2.

Harjoitustehtäviä

1.1. Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Osoita, että kaikille $x,y,z \in X$ pätee

$$\Big|d(x,z) - d(z,y)\Big| \leq d(x,y)\,.$$

1.2. Osoita, että lauseke

$$d_{\mathrm{SNCF}}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{, kun } x \text{ ja } y \text{ ovat lineaarisesti riippuvia ja} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$.

1.3. Osoita, että lauseke

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, kun } x = y \text{ ja} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$.

1.4. Osoita, että lauseke

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

määrittelee metriikan joukossa $\mathbb{R} - \{0\}$.

1.5. Olkoon E epätyhjä äärellinen joukko. Joukon E potenssijoukko on sen osajoukkojen muodostama joukko

$$\mathscr{P}(E) = \{A \subset E\}.$$

Joukkojen symmetrinen erotus määritellään asettamalla

$$A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

Osoita, että

$$d(A,B) = \#(A \bigtriangleup B)$$

on metriikka potenssijoukossa.[3] Osoita, että $\#(A - B)$ ei ole metriikka potenssijoukossa.

1.6. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon

$$K_n = \Big\{f\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{0,1\}\Big\}$$

Osoita, että

$$d(f,g) = \#\{k \in \{1,2,\dots,n\} : f(k) \neq g(k)\}\,.$$

on metriikka joukossa K_n.[4]

1.7. Olkoon d metriikka avaruudella X, ja olkoon $\alpha \in]0,1]$. Osoita, että lauseke

$$d^\alpha(x,y) = d(x,y)^\alpha$$

on myös metriikka. [5]

[3] Piirrä kolmen joukon leikkauksia kuvaava Venn-diagrammi. Osoita, että $(A \bigtriangleup C) \bigtriangleup (C \bigtriangleup B) = A \bigtriangleup B$.
[4] Tämä liittyy itse asiassa tehtävään 1.5 läheisesti.
[5] Kannattaa ensin todistaa, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a,b pätee $a^\alpha + b^\alpha \geq (a+b)^\alpha$.

1.8. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta (X, d) ja luvusta $\alpha > 1$, jolle tehtävän 1.7 tapaan määritelty funktio d^α ei ole metriikka.

1.9. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

1.10. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\Big(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\Big)$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

1.11. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\|$$

on normi avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

1.12. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

on normi avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

1.13. Olkoon $X \neq \emptyset$. Osoita, että lauseke

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

on normi avaruudessa $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$.

1.14. Osoita, että lausekkeet

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

määräävät kumpikin normin vektoriavaruudessa $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. [6]

1.15. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Osoita, että jono $f_k \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$, jos ja vain jos $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, kun $k \to \infty$.[7]

1.16. Olkoon U vektoriavaruus ja olkoon $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruus. Olkoon $L\colon U \to W$ lineaarinen isomorfismi.[8] Osoita, että lauseke

$$\|u\| = \|Lu\|_W$$

antaa normin avaruudessa U.

[6] Käytä analyysin kursseilta tuttuja asioita ja tehtävän 1.13 tulosta.
[7] Palauta mieleen kurssin JMA4/Sarjat ja approksimointi/Analyysi 3 asioita.
[8] bijektio

1.17. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja olkoon $Y \neq \emptyset$. Olkoon $b\colon Y \to X$ bijektio. Osoita, että lauseke

$$d_b(y_1,y_2) = d(b(y_1),b(y_2))$$

antaa metriikan joukossa Y. Mitä voit sanoa kuvauksesta $b\colon (Y,d_b) \to (X,d)$?

1.18. Olkoot (X_1,d_1), (X_2,d_2) ja (X_3,d_3) metrisiä avaruuksia ja olkoot $F\colon (X_1,d_1) \to (X_2,d_2)$ ja $G\colon (X_2,d_2) \to (X_3,d_3)$ isometrisia upotuksia. Osoita, että $G\circ F$ on isometrinen upotus. Osoita, että F^{-1} ja $G\circ F$ ovat isometrioita, jos F ja G ovat isometrioita.

1.19. Olkoon (X,d) metrinen avaruus, jossa on täsmälleen kolme pistettä. Osoita, että on isometrinen upotus $j\colon X \to \mathbb{E}^2$.

1.20. Esimerkissä 1.3 tarkasteltu metriikka d_{SNCF} voidaan määritellä samalla lausekkeella mihin tahansa avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kun $n \geq 1$. Osoita, että avaruudet $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{SNCF}})$ ovat isometrisia, kun $n \geq 2$. [9]

Olkoon d_p normin $\|\cdot\|_p$ määräämä metriikka vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$, kun $p = 1$ tai $p = \infty$.

1.21. Olkoon

$$Y = \Big\{0,(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Osoita, että ei ole isometristä upotusta $j\colon (Y,d_1) \to \mathbb{E}^n$ millään n. [10]

1.22. Määritä etäisyydet $d_\infty\big(0,(\frac{1}{2},t)\big)$ ja $d_\infty\big((1,0),(\frac{1}{2},t)\big)$ kaikille $t \in \mathbb{R}$. Keksi muutamia isometrisia upotuksia $j\colon ([0,1],d_{\mathbb{E}}) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, joille pätee $j(0) = 0$ ja $j(1) = (1,0)$.

[9] Tässä tehtävässä voit käyttää ilman perusteluja tietoa, että joukkojen S^k ja S^n välillä on bijektio, kun $k,n \geq 1$.

[10] Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö auttaa.

Luku 2

Pallot, avoimet joukot ja suljetut joukot.

2.1 Pallot

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r > 0$. Joukko

$$B(x_0, r) = B_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

on r-säteinen avoin pallo ja

$$\overline{B}(x_0, r) = \overline{B}_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

on r-säteinen suljettu pallo. Avoimia palloja $B(x_0, r)$, $r > 0$, sanotaan pisteen $x_0 \in X$ palloympäristöiksi.

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksikköpalloa eri metriikoissa:

$$B_{d_{\mathbb{E}}}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} = B_{d_{\text{SNCF}}}(0, 1)\,.$$

Diskreetin metriikan tilanne on mielenkiintoinen: avoimille palloille pätee

$$B_\delta(0, 1) = \{0\} = B_\delta(0, r)$$

kaikilla $0 < r \leq 1$ ja

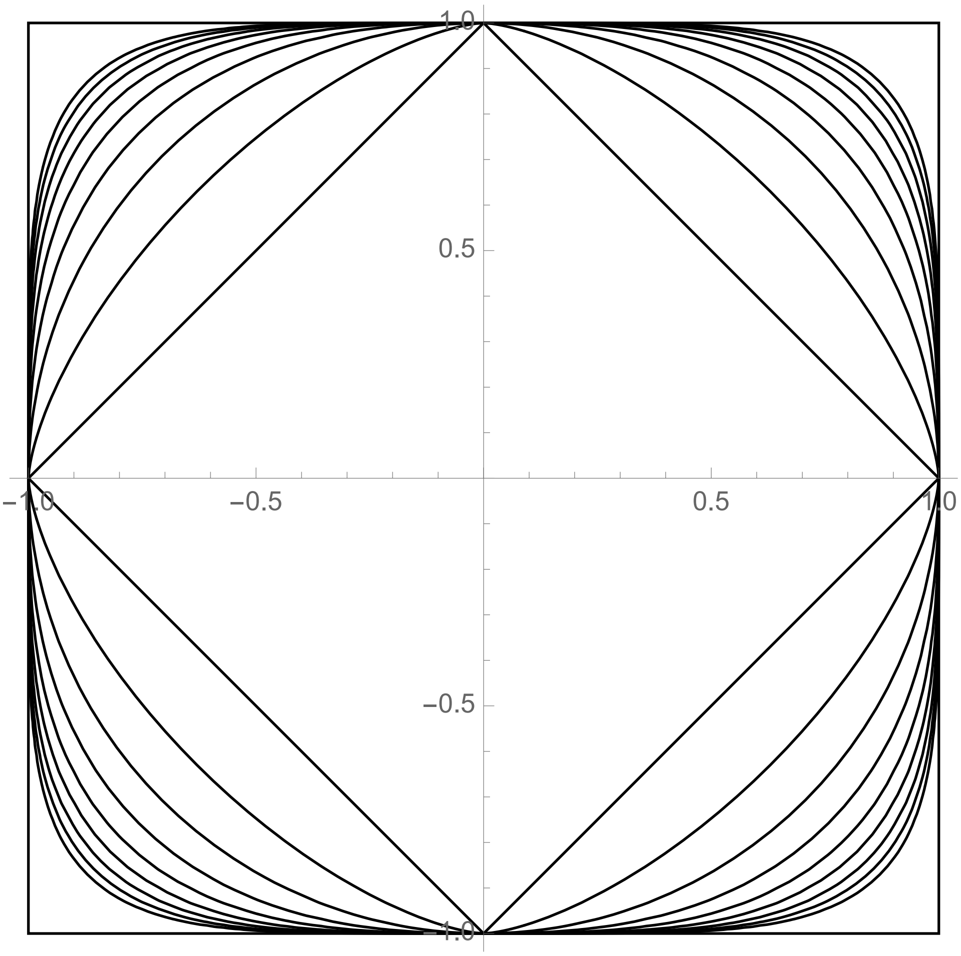
$$B_\delta(0, r) = \mathbb{R}^2$$

kaikilla $r > 1$. Vastaavasti suljetuille palloille pätee

$$\overline{B}_\delta(0, 1) = \mathbb{R}^2 = B_\delta(0, r)$$

kaikilla ≥ 1 ja

$$B_\delta(0, r) = \{0\}$$



Kuva 2.1: Yksikköympyröitä eri normeilla, kun $p \geq 1$.

kaikilla $r < 1$.

Olkoon d_p Esimerkissä 1.8 käsitellyn normin $\| \cdot \|_p$ määräämä normi, kun $1 \leq p \leq \infty$. Tällöin

$$B_{d_1}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1 \text{ ja } |x_2| < 1\} =]-1,1[^2$$

ja

$$\begin{aligned} B_{d_\infty}(0,1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 1 \text{ ja } x_1 - x_2 < 1 \text{ ja } -x_1 + x_2 < 1 \text{ ja } -x_1 - x_2 < 1\}\,. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.2. Olkoon $0 \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ vakiofunktio $0(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$. Nyt

$$B(0,1) = \{f \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}) : |f(x)| < 1 \text{ kaikilla } x \in [0,1]\}\,.$$

Metrinen avaruus X on rajoitettu, jos on $x \in X$ ja $r > 0$, joille $X \subset B(x,r)$. Olkoon lisäksi Y metrinen avaruus ja olkoon $f \colon X \to Y$. Kuvaus f on rajoitettu, jos $F(X)$ on avaruuden Y rajoitettu joukko.

Esimerkki 2.3. (1) Kaikki diskreetit metriset avaruudet (X,δ) ovat rajoitettuja koska $X = \overline{B}_\delta(x,1)$ kaikilla $x \in X$.

(2) Pallon pinta $\mathbb{S}^n$ on rajoitettu, koska $\mathbb{S}^n = \overline{B}(x,\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{S}^n$.

2.2 Avoimet ja suljetut joukot

Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Piste $a \in A$ on joukon A sisäpiste, jos on $r_a > 0$, jolle $B(a, r_a) \subset A$. Metrisen avaruuden X osajoukko on avoin, jos sen kaikki pisteet ovat sisäpisteitä ja suljettu, jos sen komplementti on avoin. Jos $U \subset X$ on avoin ja $x \in U$, niin U on pisteen x ympäristö.[a]

[a]Joskus halutaan käyttää yleisempää käsitettä ja määritellään, että joukko N on pisteen $x \in X$ ympäristö, jos on avoin joukko $U \subset N$, jolle pätee $x \in U \subset X$.

Esimerkki 2.4. (1) Metrinen avaruus X ja tyhjä joukko $\emptyset$ ovat avoimia ja suljettuja joukkoja metrisessä avaruudessa X.

(2) Diskreetin metrisen avaruuden jokainen piste on avoin ja suljettu. Itse asiassa kaikki diskreetin metrisen avaruuden osajoukot ovat avoimia: Jos E on diskreetin metrisen avaruuden epätyhjä osajoukko ja $e \in E$, niin $B(e, 1) = \{e\} \subset E$, joten e on joukon E sisäpiste.

(3) Joukko $J = [0, 1[\subset \mathbb{E}^1$ ei ole avoin eikä suljettu: 0 ei ole joukon J sisäpiste, koska $-\frac{r}{2} \in B(0, r) \cap (\mathbb{E}^1 - J)$ kaikilla $r > 0$. Samaan tapaan nähdään, että 1 ei ole joukon $\mathbb{E}^1 - J$ sisäpiste. (4) Varustetaan kohdan (3) joukko J avaruuden $\mathbb{E}^1$ indusoimalla metriikalla. Tällöin J on kohdan (1) nojalla avoin ja suljettu joukko avaruudessa $(J, d_{\mathbb{E}})$.

Propositio 2.5. *Olkoon X metrinen avaruus. Tällöin*

(1) avoin pallo $B(x, r)$ on avoin joukko kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $r > 0$.

(2) suljettu pallo $\overline{B}(x, r)$ on suljettu joukko kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $r > 0$.

Todistus. (1) Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r_0 > 0$. Olkoon $x \in B(x_0, r_0)$. Asetetaan $r_x = r_0 - d(x_0, x)$. Jos $y \in B(x, r_x)$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(y, x_0) \le d(y, x) + d(x, x_0) < r_0 - d(x_0, x) + d(x, x_0) = r_0 ,$$

joten $y \in B(x_0, r_0)$.

Väite (2) tehdään harjoituksissa. □

Propositio 2.6. *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoot A ja B indeksijoukkoja. Olkoot $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$ avoimia osajoukkoja ja olkoot $F_\beta \subset X$, $\beta \in B$ suljettuja osajoukkoja. Tällöin*

(1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

(2) $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

(3) jos A on äärellinen, niin $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

(4) jos B on äärellinen, niin $\bigcup_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

Todistus. (1) Olkoon $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tällöin $x \in U_\alpha$ jollain $\alpha \in A$. Koska U_α on avoin, on $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Siis $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

Väitteet (2)–(4) todistetaan harjoituksissa. □

Propositio 2.7. *Metrisen avaruuden X osajoukko on avoin, jos ja vain jos se on tyhjä tai se voidaan esittää avoimien pallojen yhdisteenä.*

Todistus. Jos $E \subset X$ on avoin, niin jokaisella $e \in E$ on palloympäristo $B(e, r_e) \subset E$. Saadaan siis

$$E = \bigcup_{e \in E} \{e\} \subset \bigcup_{e \in E} B(e, r_e) \subset E\,,$$

joten ketjun keskellä olevan inkluusion on oltava yhtäsuuruus. Siis

$$E = \bigcup_{e \in E} \{B(e, r_e)\}\,.$$

Väitteen toinen suunta seuraa Propositiosta 2.6. □

2.3 Sisus, reuna ja sulkeuma

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $A \subset X$. Joukon A komplementin sisäpiste on joukon A ulkopiste. Jos $x \in X$ ei ole joukon A ulkopiste eikä sisäpiste, niin se on joukon A reunapiste. Joukon A

- sisäpisteiden joukko $\operatorname{int} A$ on joukon A sisus.
- ulkopisteiden joukkoa merkitään $\operatorname{ext} A$.
- reunapisteiden joukko on ∂A.

Propositio 2.8. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Joukon A sisus ja ulkopisteiden joukko ovat avoimia ja sen reuna on suljettu. Lisäksi pätee*

$$X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A\,. \tag{2.1}$$

Todistus. Määritelmien nojalla $\operatorname{int} A$ ja $\operatorname{ext} A$ ovat erillisiä ja reuna määritellään niiden komplementtina, joten (2.1) pätee selvästi. Koska $\operatorname{ext} A$ on joukon A komplementin sisäpisteiden joukko, riittää osoittaa, että $\operatorname{int} A$ on avoin mille tahansa joukolle A, sillä avointen joukkojen $\operatorname{int} A$ ja $\operatorname{ext} A$ komplementtina ∂A on suljettu.

Olkoon $a \in \operatorname{int} A$. Tällöin on $r_a > 0$, jolle $B(a, a_r) \subset A$. Osoitetaan, että itse asiassa $B(a, a_r) \subset \operatorname{int} A$: Olkoon $b \in B(a, a_r)$. Kuten Proposition 2.5 todistuksessa huomaamme, että $B(b, r_a - d(b, a)) \subset B(a, a_r) \subset A$, joten $b \in \operatorname{int} A$. □

Lemma 2.9. *Olkoon X metrinen avaruus. Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ reunapiste, jos ja vain jos jokaisella $r > 0$ pätee $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(x, r) \cap (X - A) \neq \emptyset$.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. □

Olkoon X metrinen avaruus. Osajoukon $E \subset X$ sulkeuma on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon E:

$$\overline{E} = \bigcap_{\substack{F \supset E \\ F \text{ suljettu}}} F\,.$$

Propositio 2.10. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Tällöin*

(1) E on avoin, jos ja vain jos $E = \operatorname{int} E$.

(2) Joukko E on suljettu, jos ja vain jos $E = \overline{E}$.

(3) $\overline{E} = E \cup \partial E = \operatorname{int} E \cup \partial E$.

(4) $\partial(X - E) = \partial E$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Proposition 2.10 kohtien (2) ja (3) nojalla saadaan muun muassa seuraava havainto: Joukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää reunansa.

Esimerkki 2.11. (1) Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$ avoimen pallon $B(x_0, r)$ ja suljetun pallon $\overline{B}(x_0, r)$ sisus on $B(x_0, r)$ ja molempien pallojen reuna on joukko

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x - x_0\| = r\}\,.$$

Jos $x \in S(x_0, r)$, niin

$$x_0 + (1 - \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0) \in B(x_0, r) \cap B(x, \varepsilon)$$

ja

$$x_0 + (1 + \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0) \in (\mathbb{E}^n - B(x_0, r)) \cap B(x, \varepsilon)\,.$$

Siis $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$.
(2) Diskreetissä metrisessä avaruudessa (X, δ) avoimet pallot ovat suljettuja. Siis

$$\overline{B_\delta(x, 1)} = B_\delta(x, 1) = \{x\} \neq X = \overline{B}_\delta(0, 1)\,,$$

kun $\#X \geq 2$.

Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ kasautumispiste, jos $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ jokaisella $r > 0$. Jos on $r > 0$ siten, että $B(x, r) \cap A = \{x\}$, niin x on joukon A eristetty piste tai erakkopiste. Joukko $E \subset X$ on diskreetti, jos kaikki pisteet $x \in E$ ovat erakkopisteitä.

Lemmassa 2.9 tehty havainto reunapisteen ominaisuuksista ja kasautumispisteen määritelmä muistuttavat toisiaan melko paljon. Siksi ei olekaan yllättävää, että suljetut joukot voidaan luonnehtia kasautumispisteiden avulla samaan tapaan kuin reunan avulla:

Propositio 2.12. *Joukko E on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.*

Todistus. Olkoon $E \subset X$ suljettu. Olkoon $x \in (X - E)$. Koska $X - E$ on avoin, on $r > 0$, jolle $B(x, r) \subset X - E$. Siispä x ei ole joukon E kasautumispiste.

Oletetaan sitten, että E sisältää kaikki kasautumispisteensä. Olkoon $x \in X - E$. Tällöin x ei ole kasautumispiste, joten on $r > 0$, jolle $(B(x, r) - \{x\}) \cap E = \emptyset$. Siis $B(x, r) \subset X - E$, joten $X - E$ on avoin. Siis E on suljettu. □

Esimerkki 2.13. Joukolle $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^1$ pätee

$$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset\,, \qquad \operatorname{ext} \mathbb{Q} = \emptyset\,, \qquad \partial \mathbb{Q} = \mathbb{E}^1\,, \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^1\,.$$

Jokainen $x \in \mathbb{E}^1$ on joukon $\mathbb{Q}$ kasautumispiste ja joukon $\mathbb{E}^1 - \mathbb{Q}$ kasautumispiste.

Esimerkki 2.14. Olkoon (X, δ) diskreetti metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} A = A\,, \qquad \operatorname{ext} A = X - A\,, \qquad \partial A = \emptyset\,, \qquad \overline{A} = A\,.$$

Erityisesti joukolle $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, \delta)$ pätee

$$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\,, \qquad \operatorname{ext} \mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}\,, \qquad \partial \mathbb{Q} = \emptyset\,, \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\,.$$

Metrisen avaruuden X osajoukko E on tiheä, jos $\overline{E} = X$. Metrinen avaruus X on separoituva, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Esimerkki 2.15. (1) Rationaalilukujen joukko on siis tiheä tavallisella euklidisella etäisyydellä varustetussa reaalilukujen joukossa. Yleisemmin $\mathbb{E}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, joten $\mathbb{E}^n$ on separoituva.
(2) $\mathbb{S}^1 = \overline{\exp(\mathbb{Q})}$, joten $\mathbb{S}^1$ on separoituva.
(3) Ylinumeroituva diskreetti metrinen avaruus ei ole separoituva.

Palaamme separoituvuuteen luvussa 7.

2.4 Lokaalit ominaisuudet

Jos jokin ehto tai ominaisuus pätee metrisen avaruuden jokaisen pisteen jossain ympäristössä, sanotaan, että kyseinen ehto tai ominaisuus on lokaali. Tapasimme tällaisen käsitteen Esimerkissä 1.16 mutta lykkäsimme tarkan määritelmän esittämisen tähän lukuun.

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on lokaali(sti) isometrinen upotus, jos jokaisella $x \in X_1$ on ympäristo U_x siten, että rajoittuma $F|_{U_x}\colon U_x \to X_2$ on isometrinen upotus.

Esimerkissä 1.16 osoitimme, että kuvaus $\exp\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\exp(t) = (\cos t, \sin t)$, on lokaali isometrinen upotus.

Harjoitustehtäviä

2.1. Kuvaile Ranskan rautatieavaruuden avoimet pallot $B(x, 1)$, kun $x \neq 0$.

2.2. Osoita, että metrisen avaruuden suljettu pallo on suljettu joukko ja että jokainen yhden pisteen muodostama joukko on suljettu joukko.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $C > 0$. Asetetaan

$$d_C(x, y) = \min(d(x, y), C)$$

kaikille $x, y \in X$.

2.3. Osoita, että lauseke $d_C(x, y)$ määrittelee metriikan joukossa X.

2.4. Osoita, että joukko $U \subset X$ on avoin metrisessä avaruudessa (X, d), jos ja vain jos se on avoin metrisessä avaruudessa (X, d_C).

2.5. Todista Proposition 2.6 kohta (3).

2.6. Todista Proposition 2.6 kohdat (2) ja (4).

2.7. Todista Proposition 2.10 kohdat (1) ja (2).

2.8. Todista Proposition 2.10 kohdat (3) ja (4).

2.9. Osoita, että joukko on avoin ja suljettu, jos ja vain jos sen reuna on tyhjä.

2.10. Osoita, että $\partial\partial A \subset \partial A$. Anna esimerkki, jolle pätee $\partial\partial A \neq \partial A$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Joukon $E \subset X$ ε-paksunnos on

$$E^\varepsilon = \bigcup_{e \in E} \overline{B}(e, \varepsilon) .$$

2.11. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Osoita, että

$$\overline{E} = \bigcap_{\varepsilon > 0} E^\varepsilon .$$

2.12. Osoita, että metrisen avaruuden jokainen suljettu joukko voidaan esittää numeroituvana leikkauksena avoimista joukoista. Osoita, että metrisen avaruuden jokainen avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä suljetuista joukoista.

Olkoon $X \neq \emptyset$. Funktio $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ on ultrametriikka, jos sillä on metriikalta vaadittavat ominaisuudet (1) ja (2) ja se toteuttaa ultrametrisen epäyhtälön

$$d(x, y) \leq \max\big(d(x, z), d(z, y)\big)$$

kaikille $x, y, z \in X$. Pari (X, d) on ultrametrinen avaruus.

2.13. Osoita, että ultrametrinen avaruus (X, d) on metrinen avaruus.

2.14. Olkoon (X, d) on ultrametrinen avaruus. Osoita, että kaikille $y \in B(x, r)$ pätee $B(y, r) = B(x, r)$ ja että kaikille $y \in \overline{B}(x, r)$ pätee $\overline{B}(y, r) = \overline{B}(x, r)$.[1]

2.15. Osoita, että kaikki ultrametrisen avaruuden X pallot ovat avoimia ja suljettuja.[2]

2.16. Olkoon (X, d) ultrametrinen avaruus. Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avaruuden X jono, jolle pätee

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_{k+1}) = 0 .$$

Osoita, että $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono.

2.17. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta, jossa tehtävän 2.16 väite ei päde.

---

[1]Siis pallon jokainen piste on sen keskipiste!

[2]Käytä apuna Tehtävän 2.14 tuloksia.

Olkoon
$$\Sigma = \Big\{ a = a_0 a_1 a_2 \cdots : a_i \in \{0,1\} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N} \Big\}$$
ja määritellään metriikka d_Σ asettamalla $d_\Sigma(a,a) = 0$ kaikille $a \in \Sigma$ ja
$$d_\Sigma(a,a') = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|a_i - a_i'|}{2^i}$$
muuten. Pari (σ, d_Σ) on kahden symbolin jonoavaruus.

2.18. Jos $a, a \in \Sigma$, $a \neq a'$, asetetaan
$$m(a,a') = \min \Big\{ k \in \mathbb{N} : a_k \neq a_k' \Big\}.$$
Osoita, että
$$d_\Sigma(a,a') = 2^{-m(a,a')},$$
jos $a \neq a'$. Osoita, että (Σ, d_Σ) on ultrametrinen avaruus.

2.19. Olkoon $0 = 00000 \cdots \in \Sigma$. Kuvaile avaruuden Σ pallot $B(0,r)$ ja $\overline{B}(0,r)$ kaikille $r > 0$.

2.20. Osoita, että Σ on separoituva.

Luku 3

Jatkuvuus

3.1 Jatkuvat kuvaukset

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X_1$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$ kaikilla $x \in X_1$, joille $d_1(x_0, x) < \delta$. Kuvaus on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa avaruden X_1 pisteessä.

Jatkuvuuden määritelmä voidaan muotoilla pallojen avulla hieman geometrisemman näköisessä muodossa:

Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X_1$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että

$$F\Big(B(x_0, \delta)\Big) \subset B(f(x_0), \varepsilon)\,.$$

Esimerkki 3.1. (1) Vakiokuvaus on aina jatkuva.

(2) Jos $A \subset \mathbb{E}^n$ ja $B \subset \mathbb{E}^k$ varustetaan euklidisen avaruuden indusoimilla metriikoilla, niin kuvauksen $f\colon A \to B$ jatkuvuuden määritelmä on sama kuin analyysin ja moniulotteisen differentiaalilaskennan kursseilla. Siis esimerkiksi kaikki (useammankin muuttujan) polynomifunktiot, trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktio ovat jatkuvia.

(3) Kaikki koordinaattiprojektiot $p_k\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$,

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k\,,$$

ovat jatkuvia: Olkoot $x, y \in \mathbb{E}^n$ Tällöin

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geq |x_k - y_k| = |p_k(x) - p_k(y)|\,.$$

Jos $\|x - y\| < \varepsilon$, niin $|p_k(x) - p_k(y)| < \varepsilon$, joten p_k on jatkuva.

(4) Isometriset upotukset ovat jatkuvia kuvauksia.

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia ja olkoon $K \geq 0$. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on K-Lipschitz-jatkuva tai K-Lipschitz-kuvaus, jos kaikille $x, y \in X$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) \leq K\, d_1(x, y)\,.$$

Jos F on K-Lipschitz-jatkuva jollain $K \geq 0$, niin F on Lipschitz-jatkuva kuvaus tai Lipschitz-kuvaus.

Esimerkki 3.2. Euklidisen avaruuden koordinaattiprojektiot ovat 1-Lipschitz-kuvauksia.

Lemma 3.3. *Lipschitz-jatkuvat kuvaukset ovat jatkuvia.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 3.4. *Jos $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ ja $G\colon (X_2, d_2) \to (X_3, d_3)$ ovat jatkuvia kuvauksia, niin $G \circ F$ on jatkuva kuvaus.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 3.5. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus.*

(1) Kuvaus f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset Y$.

(2) Kuvaus f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

Todistus. Todistetaan väite (1). Toinen väite tehdään harjoituksissa.

Olkoon f jatkuva. Olkoon $x \in f^{-1}(U)$. Koska U on avoin, on $r > 0$ siten, että $B(f(x), r) \subset U$. Jatkuvuuden nojalla on $\delta > 0$, jolle $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), r)$. Siis $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), r)) \subset f^{-1}(U)$.

Oletetaan sitten, että jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Olkoon $x \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen mukaan joukon $B(f(x), \varepsilon)$ alkukuva on avoin. Koska $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, niin on $\delta > 0$, jolle $B(x, \delta) \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Siis f on jatkuva pisteessä x. □

Esimerkki 3.6. Lause 3.5 antaa kätevän keinon osoittaa joitain euklidisen avaruuden osajoukkoja avoimiksi tai suljetuiksi.

(1) Kaikki esimerkissä 1.8 määritellyt normit $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ ovat jatkuvia kuvauksia $n_p = \|\cdot\|\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$. Siis normin $\|\cdot\|_p$ määräämän metriikan d_p avoimet pallot

$$B_{d_p}(0, r) = n_p^{-1}\big(\left]-\infty, r\right[\big)$$

ovat euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ avoimia osajoukkoja.

(2) Olkoon $S\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^2$,

$$S(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t} & , \text{kun } t \neq 0 \\ 0 & , \text{kun } t = 0 \end{cases} ,$$

ja olkoon $\widetilde{S}\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$, $\widetilde{S}(x) = x_2 - S(x_1)$. Analyysin ja differentiaalilaskennan tai vektorifunktioiden analyysin kursseilta muistamme, että S ja $\widetilde{S}$ ovat jatkuvia kuvauksia. Koordinaattiprojektio $p_2(x) = x_2$ on myös jatkuva. Joukko

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ ja } \ 0 < x_2 < S(x_1)\Big\} = \widetilde{S}^{-1}\Big(]-\infty, 0[\Big) \cap p_2^{-1}(]0, \infty[)$$

on siis avoin Lauseen 3.5 nojalla.

Esimerkki 3.7. Olkoon (X, δ) diskreetti metrinen avaruus ja olkoon (Y, d) metrinen avaruus. Kaikki kuvaukset $f\colon X \to Y$ ovat jatkuvia. Tämä seuraa Lauseesta 3.5, koska kaikki diskreetin metrisen avaruuden osajoukot ovat avoimia.

Sen sijaan monista metrisistä avaruuksista on vain hyvin vähän jatkuvia kuvauksia $g\colon Y \to (X, \delta)$ diskreettiin metriseen avaruuteen, koska jokaisen yhden pisteen joukon $\{x\} \subset X$ alkukuva on avoin joukko. Jos siis $y \in g^{-1}(\{x\})$, niin on $r_y > 0$, siten, että $g(z) = x$ kaikille $z \in B(y, r_y)$. Erityisesti identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{E}^1 \to (\mathbb{R}, \delta)$ ei ole jatkuva kuvaus.

3.2 Jatkuvat kuvaukset normiavaruuteen

Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon V normiavaruus. Tällöin joukon $\mathscr{F}(X, V)$ alkioita voi laskea yhteen ja kertoa reaaliluvuilla[1]: Jos $f, g \in \mathscr{F}(X, V)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin määritellään kuvaukset $af + bg \in \mathscr{F}(X, V)$ asettamalla

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$$

kaikille $x \in X$. Jos $V = \mathbb{R}$, niin tarkasteltavien funktioiden arvot ovat reaalilukuja. Tällöin voidaan määritellä funktio $fg \in \mathscr{F}(X, V)$ asettamalla

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

kaikille $x \in X$. [2] Nämä operaatiot sopivat hyvin yhteen jatkuvuuden käsitteen kanssa:

Lemma 3.8. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon V normiavaruus. Jos $f, g \in \mathrm{C}^0(X, V)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin $af + bg \in \mathrm{C}^0(X, V)$. Jos $V = \mathbb{R}$ niin $fg \in \mathrm{C}^0(X, V)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. Todistus on täsmälleen sama kuin tapauksessa, jossa $X \subset \mathbb{E}^1$, jota tarkastellaan ensimmäisen vuoden analyysin kursseilla. □

Yleistämme nyt Esimerkin 1.10:

Esimerkki 3.9. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}^0(X, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\},$$

missä

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

on avaruuden $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ normi. Lemman 3.8 nojalla $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{R})$ on normiavaruuden $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus ja $(\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

[1] Algebrallisesti ajatellen joukko $\mathscr{F}(X, V)$ varustettuna yhteenlaskulla ja reaailuvulla kertomisella on vektoriavaruus.

[2] Joukko $\mathscr{F}(X, V)$ varustettuna yhteenlaskulla ja funktioiden kertolaskulla on ja rengas.

Harjoitustehtäviä

3.1. Osoita, että Lipschitz-jatkuvat kuvaukset ovat jatkuvia.

3.2. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $p_X \colon (X \times Y, d_{\max}) \to (X, d_X)$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$p_X(x, y) = x$$

kaikille $(x, y) \in X \times Y$. Osoita, että p_X on jatkuva.

3.3. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että normi $\|\cdot\|$ on jatkuva funktio.[3]

3.4. Onko kuvaus $\mathrm{id} \colon \mathbb{E}^2 \to (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$ jatkuva? Entä sen käänteiskuvaus?

3.5. Onko kuvaus $\mathrm{id} \colon (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$ jatkuva?

3.6. Olkoon V normiavaruus ja olkoon

$$S(0,1) = \{x \in V : \|x\| = 1\}.$$

Olkoon $\mathrm{pr}_S \colon V - \{0\} \to S(0,1)$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$\mathrm{pr}_S(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

kaikille $x \in V - \{0\}$. Osoita, että pr_S on jatkuva.

3.7. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f \colon X \to Y$ kuvaus. Osoita, että f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

3.8. Osoita, että jatkuvan funktion $f \colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ kuvaaja

$$\mathscr{G}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{E}^2 : x \in \mathbb{E}^1\}$$

on suljettu joukko avaruudessa $\mathbb{E}^2$.

3.9. Olkoon Σ kuten tehtävässä 2.18. Kuvaus $\sigma \colon \Sigma \to \Sigma$, joka määritellään asettamalla

$$\sigma(a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots) = a_1 a_2 a_3 \cdots$$

kaikille $a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots \in \Sigma$, on vasen siirto. Osoita, että σ on 2-Lipschitz-jatkuva.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Pisteen $x \in X$ etäisyys joukosta E on

$$d(x, E) = \inf\{d(x, e) : e \in E\}\,.$$

Etäisyys joukosta E määrittelee funktion $d_E \colon X \to \mathbb{E}^1$ asettamalla $d_E(x) = d(x, E)$ kaikille $x \in X$.

3.10. Osoita, että d_E on 1-Lipschitz-jatkuva kuvaus.

3.11. Osoita, että $d(x, E) = 0$, jos ja vain jos $x \in \overline{E}$.

3.12. Osoita, että $d(x, E) = d(x, \overline{E})$ kaikille $x \in X$.

[3] Osoita, että kuvaus $n \colon V \to \mathbb{E}^1$, $n(v) = \|v\|$, on jatkuva.

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$. Määritellään jokaiselle $a \in X$ kuvaus $\phi_a\colon X \to \mathbb{E}^1$ asettamalla

$$\phi_a(x) = d(x, x_0) - d(x, a)\,.$$

Määritellään kuvaus $K\colon X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ asettamalla

$$K(a) = \phi_a$$

kaikille $a \in X$.

3.13. Osoita, että ϕ_a on jatkuva kuvaus jokaisella $a \in X$.

3.14. Osoita, että kuvaus K on isometrinen upotus. [4]

[4] Avaruudessa $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ käytetään sup-normin määräämää metriikkaa kuten Esimerkissä 3.9.

Luku 4

Ekvivalentit metriikat ja homeomorfismit

4.1 Homeomorfismi

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Bijektio $F\colon X_1 \to X_2$ on homeomorfismi, jos F on jatkuva ja F^{-1} on jatkuva.

Esimerkki 4.1. (1) Isometria on homeomorfismi.
(2) Esimerkissä 3.7 tarkasteltu kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \delta) \to \mathbb{E}^1$ on jatkuva mutta se ei ole homeomorfismi.

Lemma 4.2. *Homeomorfismien yhdistetty kuvaus on homeomorfismi. Homeomorfismin käänteiskuvaus on homeomorfismi.*

Todistus. Bijektioiden yhdistetty kuvaus on bijektio ja jatkuvien kuvausten yhdistetty kuvaus on jatkuva Lemman 3.4 nojalla. Toinen väite sisältyy homeomorfismin määritelmään. □

Propositio 4.3. *Homeomorfismi kuvaa avoimet joukot avoimiksi ja suljetut joukot suljetuiksi.*

Todistus. Seuraa Lauseesta 3.5, koska käänteiskuvaus on jatkuva. □

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kokoelma

$$\tau(X, d) = \{U \subset X : U \text{ on avoin}\}$$

on metrisen avaruuden (X, d) topologia.

Metristen avaruuksien kurssia seuraavalla kurssilla, jonka nimi on topologia, topologia on peruskäsite. Topologinen avaruus on pari, joka koostuu epätyhjästä joukosta ja topologiasta, jolla on samoja ominaisuuksia kuin metrisen avaruuden avoimien joukkojen kokoelmalla.

Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X metriikat d ja $\widetilde{d}$ ovat ekvivalentteja, jos metristen avaruuksien (X, d) ja $(X, \widetilde{d})$ topologiat ovat samat.

Propositio 4.4. *Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X metriikat d ja $\widetilde{d}$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos $\mathrm{id}\colon (X, d) \to (X, \widetilde{d})$ on homeomorfismi.*

Todistus. Seuraa suoraan Lauseesta 3.5 ja määritelmistä. □

Propositio 4.5. *Olkoot d_X ja $\widetilde{d}_X$ ekvivalentteja metriikoita joukolla $X \neq \emptyset$ ja olkoot d_Y ja $\widetilde{d}_Y$ ekvivalentteja metriikoita joukolla $Y \neq \emptyset$. Kuvaus $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on jatkuva, jos ja vain jos kuvaus $f\colon (X, \widetilde{d}_X) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ on jatkuva.*

Todistus. Kutsutaan todistuksessa kuvausta $f\colon (X, \widetilde{d}_X) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ kuvaukseksi $\widetilde{f}$. Metriikoiden ekvivalenssioletuksen nojalla identtiset kuvaukset $\mathrm{id}_X\colon (X, d_X) \to (X, \widetilde{d}_X)$ ja $\mathrm{id}_Y\colon (Y, d_Y) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ ovat homeomorfismeja. Tarkasteltavat kuvaukset muodostavat kaavion

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Y} \\ X & \xrightarrow{\widetilde{f}} & Y \end{array}$$

Jos f on jatkuva, niin $\widetilde{f} = \mathrm{id}_Y \circ f \circ \mathrm{id}_X^{-1}$ on kolmen jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva. Jos taas $\widetilde{f}$ on jatkuva, niin $f = \mathrm{id}_Y^{-1} \circ \widetilde{f} \circ \mathrm{id}_X$ on kolmen jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva. □

Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X metriikat d ja $\widetilde{d}$ ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja, jos on $M > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{M} d(x, y) \leq \widetilde{d}(x, y) \leq M d(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$.

Propositio 4.6. *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoot d ja $\widetilde{d}$ metriikoita joukolla X. Jos d ja $\widetilde{d}$ ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja, niin joukko $A \subset X$ on avoin metrisessä avaruudessa (X, d), jos ja vain jos se on avoin metrisessä avaruudessa $(X, \widetilde{d})$.*

Todistus. Oletetaan, että

$$\frac{1}{M} d(x, y) \leq \widetilde{d}(x, y) \leq M d(x, y)$$

jollain $M > 0$. Symmetrian vuoksi riittää osoittaa, että metriikan d suhteen avoimet joukot ovat avoimia metriikan $\widetilde{d}$ suhteen.

Olkoon $U \subset (X, d)$ avoin joukko. Osoitetaan, että U on avoin myös metriikan $\widetilde{d}$ suhteen. Olkoon $x \in U$. Oletuksen nojalla on $r > 0$, jolle $B_d(x, r) \subset U$. Olkoon $y \in B_{\widetilde{d}}(x, \frac{r}{M})$. Tällöin $d(x, y) \leq M\widetilde{d}(x, y) < M\,\frac{r}{M} = r$, joten

$$B_{\widetilde{d}}\Big(x, \frac{r}{M}\Big) \subset B_d(x, r) \subset U\,.$$

Siis x on joukon U sisäpiste avaruudessa $(X, \widetilde{d})$. □

Seuraus 4.7. *Bi-Lipschitz-ekvivalentit metriikat ovat ekvivalentteja.* □

4.2 Ekvivalentit normit

Vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentit, jos on $c > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{c}\|v\|' \leq \|v\| \leq c\|v\|$$

kaikille $v \in V$.

Lemma 4.8. *Vektoriavaruuden V normit ovat ekvivalentit, jos ja vain jos ne määräävät bi-Lipschitz-ekvivalentit metriikat.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. □

Lause 4.9. *Kaikki äärellisulotteisen vektoriavaruuden normit ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Voimme olettaa, että tarkasteltava vektoriavaruus on $\mathbb{R}^n$. Osoitetaan, että normi $\|\cdot\|$ on ekvivalentti euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa. Olkoon $e_1, e_2, \dots e_n$ standardikanta. Tällöin kolmioepäyhtälön, normin homogeenisuuden ja Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön ja euklidisen normin perusominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}
\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| &= \Big(\big(|x_1|, \dots, |x_n|\big) \mid \big(\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\big)\Big) \\
&\leq \Big\|\big(|x_1|, \dots, |x_n|\big)\Big\|_2 \Big\|\big(\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\big)\Big\|_2 \\
&\leq \sqrt{n}\,\max\Big\{\|e_i\| : 1 \leq i \leq n\|\Big\}\,\|x\|_2\,, \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

joten haluttu epäyhtälö saadaan toiseen suuntaan.

Vastakkaisen suunnan todistamiseksi huomataan, että käänteisen kolmioepäyhtälön ja epäyhtälön (4.1) nojalla normi $\|\cdot\|$ on Lipschitz-jatkuva: Kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\| \leq \sqrt{n}\,\max\Big\{\|e_i\| : 1 \leq i \leq n\|\Big\}\,\|x - y\|_2\,.$$

Siis kuvaus $x \mapsto \|x\|$ saavuttaa miniminsä $m > 0$ euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ suljetulla ja rajoitetulla[1] yksikköpallon pinnalla, joten kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geq m\,.$$

Haluttu epäyhtälö $\|x\| \geq m\|x\|_2$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ seuraa tästä, koska $\|0\| = \|0\|_2 = 0$. □

Palaamme Lauseen 4.9 jälkimmäisen suunnan todistuksessa käytettyyn differentiaalilaskennan/vektorifunktioiden analyysin kursseilta tuttuun minimiargumenttiin yleisemmässä metristen avaruuksien yhteydessä Luvussa 7.

[1] siis kompaktilla

4.3 Tuloavaruudet

Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) karteesisesta tulosta saadaan metrinen avaruus esimerkiksi varustamalla tulojoukko $X \times Y$ jollain seuraavista metriikoista:

$$
\begin{aligned}
d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \\
d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} = \|(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))\|_{\mathbb{E}^2} \\
d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max\Big(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\Big) .
\end{aligned}
$$

Lemma 4.10. *Lausekkeet d_1, d_2 ja $d_{\max}$ määrittelevät metriikat tuloavaruudessa $X \times Y$.*

Todistus. Se, että d_1 ja $d_{\max}$ ovat metriikoita osoitettiin Harjoitustehtävissä 1.9 ja 1.10. Tarkastetaan vielä, että myös d_2 on metriikka. Kolmioepäyhtälö on jälleen oleellisin asia: Olkoot $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$. Tällöin määritelmän, avaruuksien X ja Y kolmioepäyhtälöiden, tason vektoritulkinnan ja euklidisen tason kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$
\begin{aligned}
d((x_1, y_1), (x_2, y_2))^2 &= d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2 \\
&\le (d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2))^2 \\
&= \|(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) + (d_X(x_3, x_2), d_Y(y_3, y_2))\|_{\mathbb{E}^2}^2 \\
&\le \Big(\|(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3))\|_{\mathbb{E}^2} + \|(d_X(x_3, x_2), d_Y(y_3, y_2))\|_{\mathbb{E}^2}\Big)^2 \\
&= \Big(d_2((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d_2((x_3, y_3), (x_2, y_2)\Big)^2 .
\end{aligned}
$$

Kolmioepäyhtälö seuraa tästä. □

Propositio 4.11. *Metriikat d_1, d_2 ja d_3 ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 4.12. *Metriset avaruudet (X, d_1), (X, d_2) ja $(X, d_{\max})$ ovat homeomorfisia. Erityisesti identtinen kuvaus on homeomorfismi näiden avaruuksien välillä.* □

Jatkossa käytämme tilanteen mukaan jotain metriikoista $d_{\max}$, d_1 tai d_2 tuloavaruuden tarkastelussa.

Usein d_1 ja $d_{\max}$ ovat teknisesti hyviä valintoja. Jos tuloksessa ei mainita, mikä metriikoista on käytössä, väite pätee kaikille niille.

Propositio 4.13. *Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) ja (Z, d_Z) metrisiä avaruuksia. Tällöin*

(1) kuvaukset $p_X\colon X \times Y \to X$, $p(x, y) = x$ ja $p_Y\colon X \times Y \to Y$, $p(x, y) = y$ ovat jatkuvia.

(2) Kuvaus $F\colon Z \to X \times Y$ on jatkuva, jos ja vain jos komponenttikuvaukset $F_X = p_X \circ F$ ja $F_Y = p_Y \circ F$ ovat jatkuvia.

Todistus. (1) Varustetaan tuloavaruus $X \times Y$ maksimimetriikalla $d_{\max}$. Riittää tarkastella kuvausta p_X. Olkoon $(x_0, y_0) \in X \times Y$. On helppo nähdä, että p_X on 1-Lipschitz:

$$d_X(p_X(x,y), p_X(x_0,y_0)) = d_X(x,x_0) \leq \max\Big(d_X(x,x_0), d_Y(y,y_0)\Big) = d_{\max}((x,y),(x_0,y_0)) \,.$$

Siis p_X on jatkuva.

(2) Harjoitustehtävä. □

Seuraus 4.14. *Avointen joukkojen tulo on avoin. Suljettujen joukkojen tulo on suljettu.*

Todistus. (1) Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$ avoimia joukkoja. Tällöin

$$A \times B = p_X^{-1}(A) \cap p_Y^{-1}(B) \,.$$

Koska projektiokuvaukset P_X ja p_Y ovat jatkuvia Proposition 4.13(1) nojalla, joukot $p_X^{-1}(A)$ ja $p_Y^{-1}(B)$ ovat avoimia. Siis $A \times B$ on avoin.

(2) Harjoitustehtävä. □

Harjoitustehtäviä

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $M \geq 1$. Kuvaus $F\colon X \to Y$ on M-bi-Lipschitz-kuvaus, jos kaikille $x_1, x_2 \in X$ pätee

$$\frac{d_X(x_1,x_2)}{M} \leq d_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq M\, d_X(x_1,x_2) \,.$$

Jos F on M-bi-Lipschitz-kuvaus jollakin $M > 1$, niin se on bi-Lipschitz-kuvaus.

4.1. Osoita, että surjektiivinen bi-Lipschitz-kuvaus on homeomorfismi

---

Olkoon $h\colon X \to Y$ homeomorfismi. Olkoon $E \subset X$.

4.2. Osoita, että $h(\overline{E}) = \overline{h(E)}$ ja $h(\operatorname{int} E) = \operatorname{int} h(E)$.

4.3. Osoita, että $h(\partial E) = \partial h(E)$.

4.4. Osoita, että Harjoitustehtävässä 1.4 määritelty metriikka d on ekvivalentti euklidisen metriikan joukkoon $\mathbb{R} - \{0\}$ indusoiman metriikan kanssa.

4.5. Olkoot $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ normeja vektoriavaruudessa V. Osoita, että normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos ne määräävät saman topologian.

4.6. Todista Proposition 4.13 kohta (2).

4.7. Osoita, että metriikka $d\colon X \times X \to \mathbb{E}^1$ on jatkuva funktio.[2]

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia.

4.8. Osoita, että

$$\begin{aligned} d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\le d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\le d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\le 2\, d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

kaikille $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$.[3]

4.9. Olkoot $C \subset X$ ja $D \subset Y$ suljettuja joukkoja. Osoita, että $C \times D$ on suljettu?

4.10. Olkoot $F \subset X$ ja $G \subset Y$ osajoukkoja. Määritä $\partial(F \times G)$.

[2] Kannattaa käyttää summametriikkaa d_1.

[3] Keskimmäisen epäyhtälön todistuksessa huomaa, että $\|(a, b)\|_{\mathbb{E}^2} = \|(a, 0) + (0, b)\|_{\mathbb{E}^2}$ ja tutki Lauseen 4.9 todistusta.

Luku 5

Jonot ja raja-arvot

5.1 Suppenevat jonot ja Cauchyn jonot

Olkoon $A \neq \emptyset$. Kuvaus $a \colon \mathbb{N} - \{0\} \to A$ on joukon A jono. [a] Yleisesti jonon arvoja merkitään $a_n = a(n)$ ja jonolle käytetään merkintää $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$.

Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa $x \in X$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in B(x, \varepsilon)$ kaikilla $k \geq N$. Jos jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, käytetään merkintöjä $x_n \to x$, kun $x \to \infty$ ja $\lim_{n \to \infty} = x$.

[a] Yhtä hyvin jono voi olla kuvaus $a \colon \mathbb{N} \to A$, tällöin indeksointi aloitetaan nollasta.

Lemma 5.1. *Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa $x \in X$, jos ja vain jos $d(x_n, x) \to 0$, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 5.2. *Jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoot $a, b \in X$ siten, että $d(x_n, a) \to 0$ ja $d(x_n, b) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \to 0$, kun $n \to \infty$, joten $d(a, b) = 0$. Siis $a = b$. □

Esimerkki 5.3. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Harjoitustehtävässä 1.15 osoitettiin, että jonon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppeneminen metrisessä avaruudessa $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ on sama asia kuin se, että funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Propositio 5.4. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Tällöin $\overline{E}$ koostuu kaikista joukon E alkioista muodostettujen avaruuden X suppenevien jonojen raja-arvoista.*

Todistus. Jokainen joukon E piste on vakiojonon raja-arvo. On selvää, että mikään joukon E ulkopiste ei ole joukon E jonon raja-arvo. Riittää siis osoittaa, että jokainen joukon E reunapiste on jonkin joukon E jonon raja-arvo. Olkoon $x_0 \in \partial E$. Tällöin $B(x_0, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$ jokaisella $k > 1$. Valitaan jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ alkio $e_k \in B(x_0, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$. Tällöin $x_0 = \lim_{k \to \infty} e_k$. □

Metrisen avaruuden (X,d) jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ kaikille $m, n \geq N$.

Lemma 5.5. *(1) Suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.*

(2) Cauchyn jonot ovat rajoitettuja.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Aiemmilta kursseilta tiedämme, että reaalilukujen avaruuden $\mathbb{E}^1$ täydellisyyden nojalla kaikki Cauchyn jonot suppenevat euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Vastaava tulos ei päde kaikissa metrisissä avaruuksissa kuten seuraava alkeellinen esimerkki osoittaa:

Esimerkki 5.6. Jono $(\frac{1}{k})_{k=1}^\infty$ on Cauchyn metrisessä avaruudessa

$$(X,d) = \left(\left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}, d_{\mathbb{E}}\right).$$

Jono $(\frac{1}{k})_{k=1}^\infty$ ei kuitenkaan suppene. Tämä on helppo tarkastaa: Jos se suppenisi raja-arvoon $\frac{1}{N}$, niin se suppenisi tähän raja-arvoon myös avaruudessa $\mathbb{E}^1$. Mutta avaruudessa $\mathbb{E}^1$ pätee $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla mikään $\frac{1}{N}$ ei ole raja-arvo. Väite voidaan todistaa myös viittaamatta avaruuteen $\mathbb{E}^1$: Olkoon $\frac{1}{n_0} \in X$. Kun $k > n_0$, pätee

$$d_{\mathbb{E}}\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{k}\right) \geq \frac{1}{n_0\,(n_0+1)},$$

joten $\frac{1}{n_0}$ ei ole jonon raja-arvo.

Joukon E halkaisija on

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(a,b) : a, b \in E\}.$$

Lemma 5.7. *Metrisen avaruuden (X,d) jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos $\operatorname{diam}\{x_k : k \geq n\} \to 0$, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Määritelmän mukaan $(x_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ kaikille $m, n \geq N$. Yhtäpitävästi jokaisella $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\{d(x_m, x_n) : m, n \geq N\} \subset [0, \varepsilon[$, toisin sanoen $\operatorname{diam}\{x_k : k \geq n\} \to 0$, kun $n \to \infty$. $\square$

Lemma 5.8. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Tällöin*[1]

(1) Jono $(x_k, y_k)_{k=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $(x,y) \in X \times Y$, jos ja vain jos jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $x \in X$ ja jono $(y_k)_{k=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $y \in Y$.

(2) Jono $(x_k, y_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos jonot $(x_k)_{k=1}^\infty$ ja $(y_k)_{k=1}^\infty$ ovat Cauchyn jonoja.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

[1] Muista Seurauksen 4.12 jälkeen tehty sopimus tuloavaruuden metriikoista.

5.2 Osajonot

Olkoon $a\colon \mathbb{N} \to A$ jono ja olkoon $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kasvava injektio. Kuvaus $a \circ i$ on jonon a osajono. Kun jonolle a käytetään merkintää $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, osajonolle $a \circ i$ käytetään merkintää $a \circ i = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, missä $a_{n_k} = a_{i(k)} = a(i(k))$.

Esimerkki 5.9. Olkoon $a_k = (-1)^k \in \mathbb{E}^1$. Olkoot $i, j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kuvaukset $i(k) = 2k$ ja $j(k) = 2k + 1$. Tällöin $a \circ i$ on parillisten indeksien osajono $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, joka on tässä tapauksessa vakiojono 1 ja $a \circ j$ on parittomien indeksien osajono $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, joka on tässä tapauksessa vakiojono -1.

Lemma 5.10. *Suppenevan jonon osajonot ovat suppenevia ja niillä on sama raja-arvo. Cauchyn jonon osajonot ovat Cauchyn jonoja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 5.11. *Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchyn jono, jolla on suppeneva osajono. Tällöin jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on suppeneva ja sen raja-arvo on sama kuin osajonon raja-arvo.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

5.3 Jonot ja jatkuvat kuvaukset

Lemma 5.12. *Jatkuva kuvaus kuvaa suppenevat jonot suppeneviksi jonoiksi.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ suppeneva jono avaruudessa X ja olkoon x sen raja-arvo. Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden nojalla on $\delta > 0$ siten, että $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Raja-arvon määritelmän nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in B(x, \delta)$ kaikilla $k \geq N$. Siis kaikilla $k \geq N$ pätee $f(x_k) \in f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, joten $f(x_k) \to f(x)$, kun $k \to \infty$. □

Esimerkki 5.13. Olkoon $x_k = \frac{1}{k} \in \,]0, \infty[$ kaikilla $k \geq \mathbb{N} - \{0\}$. Metrisen avaruuden $(]0, \infty[, d_{\mathbb{E}})$ jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono kuten Esimerkissä 5.6 todettiin. Kuvaus $g\colon]0, \infty[\,\to\,]0, \infty[$, $g(x) = \frac{1}{x}$, on jatkuva. Jono $(g(x_k))_{k=1}^{\infty}$ ei ole Cauchyn jono koska $g(x_k) = k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Cauchyn jonot säilyvät Cauchyn jonoina, jos niitä kuvataan hieman säännöllisemmillä kuin jatkuvilla kuvauksilla.

Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on tasaisesti jatkuva, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$ kaikilla $x, y \in X_1$, joille $d_1(x, y) < \delta$.

Lemma 5.14. *Tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva.*

Todistus. Tämä on selvää. □

Seuraava helppo esimerkki osoittaa, että kaikki jatkuvat kuvaukset eivät ole tasaisesti jatkuvia. Toisaalta monet tapaamamme kuvaukset ovat tasaisesti jatkuvia.

Esimerkki 5.15. (1) Kuvaus $g\colon \mathbb{E}^1 - \{0\} \to \mathbb{E}^1$, $g(t) = \frac{1}{t}$ on jatkuva mutta ei tasaisesti jatkuva.

(2) Harjoitustehtävässä 3.1 osoitettiin, että Lipschitz-kuvaukset ovat jatkuvia. Todistus itse asiassa osoittaa, että ne ovat tasaisesti jatkuvia. Erityisesti isometriset upotukset ovat tasaisesti jatkuvia.

(3) Kuvaus $s\colon ([0,\infty[, d_{\mathbb{E}}) \to \mathbb{E}^1$, $s(t) = \sqrt{t}$ on tasaisesti jatkuva: Sen rajoittuma välin $[0,1]$ komplementtiin on 1-Lipschitz koska havainnosta

$$|x-y| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\,|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$$

saadaan

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} < |x-y|\,.$$

Analyysin kursseilla on osoitettu, että suljetun ja rajoitetun välin jatkuvat kuvaukset ovat tasaisesti rajoitettuja. Valitsemalla kullekin $\varepsilon > 0$ pienempi näiden kahden välin antamista luvuista $\delta > 0$ näemme, että s on tasaisesti jatkuva.

Kuvaus s ei ole Lipschitz-jatkuva: Jos s olisi M-Lipschitz, niin

$$(\sqrt{2}-1)\,\sqrt{t} = |s(2t)-s(t)| \le M|2t-t| = Mt$$

kaikille $t \in \,]0,\frac{1}{2}]$. Siis $\sqrt{t} \ge \frac{\sqrt{2}-1}{M}$ kaikilla $t \in \,]0,\frac{1}{2}]$, mutta tämä ei pidä paikkaansa.

Propositio 5.16. *Tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

5.4 Kuvauksen raja-arvo

Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \overline{A}$. Kuvauksella $f\colon A \to Y$ on raja-arvo $b \in Y$ pisteessä a, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että

$$f\Big(\big(B(a,\delta) - \{a\}\big) \cap A\Big) \subset B(b,\varepsilon)\,.$$

Jos kuvauksella $f\colon X \to Y$ on raja-arvo $b \in Y$ pisteessä a, käytetään merkintöjä $f(x) \to b$, kun $x \to a$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Propositio 5.17. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \overline{A}$ ja olkoon $f\colon A \to Y$. Tällöin $b = \lim_{x\to a} f(x)$, jos ja vain jos $b = \lim_{k\to\infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.*

Todistus. Oletetaan, että $b = \lim_{k\to\infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Jos b ei ole funktion f raja-arvo pisteessä a, niin on $\varepsilon > 0$ siten, että jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ on $\bar{a}_k \in B(a,\frac{1}{k}) \cap A$, jolle $f(\bar{a}_k) \notin B(b,\varepsilon)$. Tällöin $\bar{a}_k \to a$, kun $k \to \infty$ mutta $f(\bar{a}_k)$ ei suppene raja-arvoon b vastoin oletusta.

Toinen suunta todistetaan kuten Lemma 5.12. □

Harjoitustehtäviä

5.1. Osoita, että suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.

5.2. Osoita, että Cauchyn jonot ovat rajoitettuja.

5.3. Todista Lemma 5.8.

5.4. Olkoot $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenevia jonoja normiavaruudessa V ja olkoot $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenevia reaalilukujonoja. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = \lim_{k\to\infty}\lambda_k \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty}\mu_k \lim_{k\to\infty} y_k\,.$$

5.5. Osoita, että tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.

5.6. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \overline{A}$ ja olkoon $f\colon A \to Y$ siten, että $b = \lim_{x\to a} f(x)$. Osoita, että $b = \lim_{k\to\infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.

5.7. Todista Lemma 5.10.

5.8. Todista Lemma 5.11.

5.9. Olkoot d ja d' metriikoita joukossa X. Olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ joukon X jono, joka suppenee metrisessä avaruudessa (X, d) mutta ei suppene metrisessä avaruudessa (X, d'). Osoita, että metriikat d ja d' eivät ole ekvivalentteja.

5.10. Osoita, että normit

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

eivät ole ekvivalentteja vektoriavaruudessa $\mathrm{C}^0([0,1])$.[2]

[2] Tehtävä 5.9 auttaa.

Luku 6

Täydellisyys

6.1 Täydellinen metrinen avaruus

Metrinen avaruus X on täydellinen, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

Esimerkki 6.1. Analyysin kursseilta muistamme, että $\mathbb{E}^1$ on täydellinen. Harjoituksissa osoitetaan Lemman 5.8 nojalla $\mathbb{E}^n$ on täydellinen.

Lemma 6.2. *Olkoon $A \neq \emptyset$. Tällöin avaruus* $\operatorname{raj}(A, \mathbb{E}^1)$ *on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono. Tällöin jono $(f_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono jokaisella $a \in A$. Koska $\mathbb{E}^1$ on täydellinen, jono $(f_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee jokaisella $a \in A$. Määritellään $f\colon A \to \mathbb{E}^1$ asettamalla

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} f_k(a)$$

jokaisella $a \in A$. Jono $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu Lemman 5.5 nojalla. Siis $\|f_k\| \leq M$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten on $x_0 \in \mathbb{E}^1$ ja $M > 0$, joille pätee $f_k(a) \in \overline{B}(0, M)$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siis $f(a) \in \overline{B}(0, M)$ kaikilla $a \in A$ ja $f \in \operatorname{raj}(A, \mathbb{E}^1)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono, niin on $N > 0$ siten, että $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$ jokaisella $k, m \geq N$. Siis jokaisella $a \in A$ pätee $|f_k(a) - f_m(a)| < \varepsilon$, kun $k, m \geq N$ joten $|f_k(a) - f(a)| \leq \varepsilon$ kaikilla $a \in A$, kun $k \geq N$. Siis

$$\|f_k - f\| = \sup_{a\in A} \|f_k(a) - f(a)\|_\infty \leq \varepsilon\,,$$

kun $k \geq N$. □

Lemma 6.3. *Olkoon (X, d_X) täydellinen metrinen avaruus. Joukko $E \subset X$ on suljettu, jos ja vain jos metrinen avaruus (E, d_X) on täydellinen.*

Todistus. Jos E on suljettu, niin kaikkien joukon E alkioista muodostettujen suppenevien jonojen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ raja-arvot ovat joukossa E Proposition 5.4 nojalla. Metrisen avaruuden (E, d_X) jono on Cauchyn jono, jos ja vain jos se on avaruuden (X, d_X) Cauchyn jono.

Suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja Lemman 5.5 nojalla. Siis kaikki avaruuden (E, d_X) Cauchyn jonot suppenevat, joten se on täydellinen.

Oletetaan sitten, että (E, d_X) on täydellinen. Joukon E alkioista muodostetut avaruuden (X, d_X) suppenevat jonot ovat avaruuden (E, d_X) Cauchyn jonoja. Siis ne suppenevat avaruudessa (E, d_X). Mutta tällöin niiden raja-arvot avaruuden (X, d_X) jonoina sisältyvät osajoukkoon E, joten E on suljettu Proposition 5.4 nojalla. □

Propositio 6.4. *Olkoon X metrinen avaruus. Normiavaruus $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen.*

Todistus. Kuten Esimerkissä 1.10 voidaan osoittaa, että $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellisen normiavaruuden $\mathrm{raj}(X, \mathbb{E}^1)$ aliavaruus. Osoitetaan, että $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ on suljettu. Tällöin väite seuraa Lemmasta 6.3.

Proposition 5.4 nojalla riittää osoittaa, että kaikki avaruuden $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ Cauchyn jonot suppenevat. Olkoon $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono. Se on Cauchyn jono avaruudessa $\mathrm{raj}(X, \mathbb{E}^1)$, joten se suppenee tässä avaruudessa kohti rajafunktiota f. Osoitamme, että f on jatkuva.[1] Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\|f_k - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$, kun $k \geq N$ ja $\delta > 0$ siten, että $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, kun $d(x, x_0) < \varepsilon$. Kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\,,$$

kun $d(x, x_0) < \varepsilon$. □

Seuraus 6.5. *Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Normiavaruus $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen.*

Todistus. Analyysin kursseilta muistamme, että suljetun ja rajoitetun välin jatkuvat funktiot ovat rajoitettuja. Väite seuraa siis Propositiosta 6.4. □

Täydellisiä normiavaruuksia kuten $\mathrm{raj}(A, \mathbb{E}^1)$ ja $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{E}^1)$ kutsutaan Banachin avaruuksiksi. Banachin avaruuksia tarkastellaan lähemmin funktionaalianalyysin kurssilla.

Olkoon X metrinen avaruus. Täydellinen metrinen avaruus $\widehat{X}$ on avaruuden X täydellistymä, jos on isometrinen upotus $j\colon X \to \widehat{X}$ siten, että $j(X)$ on tiheä.[a]

[a] Myös isometrista upotusta $j\colon X \to \widehat{X}$ sanotaan avaruuden X täydellistymäksi.

Osoitamme, että jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä. Käytämme apuna seuraavaa tärkeää tulosta.

Lause 6.6 (Kuratowskin upotuslause)**.** *Jokaisella metrisellä avaruudella X on isometrinen upotus $K\colon X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 3.14. □

Lause 6.7. *Jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä.*

[1] Todistus on sama kuin analyysin kursseilla tapauksessa, jossa X on suljettu ja rajoitettu väli avaruudessa $\mathbb{E}^1$.

Todistus. Olkoon $K\colon X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ Kuratowskin upotus. Joukko $\overline{K(X)}$ on suljettu, joten varustettuna avaruuden $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ metriikalla se on täydellinen metrinen avaruus Lemman 6.3 nojalla. Määritelmän nojalla $K(X)$ on tiheä avaruudessa $\overline{K(X)}$. □

Lause 6.8. *Metrisen avaruuden täydellistymä on isometriaa vaille yksikäsittenen: Jos $i\colon X \to Y$ ja $j\colon X \to Z$ ovat metrisen avaruden X täydellistymiä. Tällöin on isometria $h\colon Y \to Z$, jolle $h \circ i = j$.*

Todistus. Määritellään kuvaus $g\colon i(X) \to j(X)$ asettamalla $g = j \circ i^{-1}$. Olkoon $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono joukossa $j(X)$. Tällöin on $\lim_{k\to\infty} y_k = y \in Y$. Isometriana g on tasaisesti jatkuva, joten $(g(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Siis jono $(g(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee avaruudessa Z.

Määritellään $h(y) = \lim_{k\to\infty} g(y_k)$. Määritelmä on hyvin asetettu: Jos $(\overline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on toinen joukon $i(X)$ jono, joka suppenee raja-arvoon y, niin $\lim_{k\to\infty} g(y_k) = \lim_{k\to\infty} g(\overline{y}_k)$: Koska g on isometria, niin jono $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, joka määritellään asettamalla $z_{2k} = g(y_k)$ ja $z_{2k+1} = g(\overline{y}_k)$ on Cauchyn jono. Siis se suppenee, joten parillisten ja parittomien indeksien osajonoilla on sama raja-arvo.

Osoitetaan, että $h\colon i(X) \to j(X)$ on isometria: Olkoot $a, b \in Y$. Tällöin $a = \lim a_k$ ja $b = \lim b_k$ joillain Cauchyn jonoilla $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Kuvauksen g isometrisyyden nojalla

$$d(a, b) = \lim d(a_k, b_k) = \lim d(g(a_k), g(b_k)) = d(h(a), h(b))\,.$$

Siis h on isometrinen upotus. Mutta selvästi jokaisen avaruuden Z Cauchyn jonon alkukuva on Cauchyn jono, joten h on surjektio. □

Lause 6.9 (Cantorin leikkauslause)**.** *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot*

$$X \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$$

epätyhjiä sisäkkäisiä suljettuja joukkoja. Jos $\mathrm{diam}(E_k) \to 0$,[2] *kun $k \to \infty$, niin*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$$

jollain $x_0 \in X$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 6.10 (Suljettujen välien periaate)**.** *Olkoot $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ jono sisäkkäisiä suljettuja välejä euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Jos* $\mathrm{diam}(K_k) \to 0$*, kun $k \to \infty$*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$$

jollain $x_0 \in \mathbb{E}^n$. □

Esimerkki 6.11. Proposition 6.9 ja Seurauksen 6.10 väite ei päde ilman oletusta, että joukot ovat suljettuja: Olkoot $I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$ kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ ja $\mathrm{diam}(K_k) \to 0$, kun $k \to \infty$ mutta $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset$.

[2] Koska reaalilukujen osajoukkona tyhjän joukon supremum on $-\infty$, niin tämä oletus sisältää sen, että joukot E_k eivät ole tyhjiä.

6.2 Banachin kiintopistelause

Olkoon X metrinen avaruus. Jos kuvaus $F\colon X \to X$ on K-Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on (K-)kutistava. Jos $F(x) = x$ jollain $x \in X$, niin x on kuvauksen F kiintopiste.

Lause 6.12 (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause)**.** *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F\colon X \to X$ on täsmälleen yksi kiintopiste. Jos F on K-kutistava ja x_0 on sen kiintopiste, niin*

$$d(x_0, F^k(x)) \le K^k d(x_0, x)$$

kaikille $x \in X$.

Todistus. Olkoon $F\colon X \to X$ K-kutistava kuvaus. Huomataan varsinaiseta todistusta varten aluksi, että jokaisella $\varepsilon' > 0$ on $N(\varepsilon') > 0$ siten, että

$$\frac{K^m}{1-K} < \varepsilon' \,,$$

kun $m \ge N(\varepsilon')$.

Olkoon $x \in X$ ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
d(F^m(x), F^n(x)) &\le \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\
&\le \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k}\, d(x, F(x)) \le \frac{K^m}{1-K}\, d(x, F(x)) < \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

kun $m \ge N\Big(\frac{\varepsilon}{d(x,F(x))}\Big)$. Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono. Koska X on täydellinen, jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ suppenee kohti jotain pistettä $x_\infty \in X$.

Osoitetaan sitten, että piste x_∞ on kuvauksen F kiintopiste. Kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}
0 \le d(x_\infty, F(x_\infty)) &\le d(x_\infty, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_\infty)) \\
&\le (1+K) d(x_\infty, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \to 0,
\end{aligned}$$

kun $j \to \infty$. Siis $d(x_\infty, F(x_\infty)) = 0$, joten $x_\infty = F(x_\infty)$.

Osoitetaan vielä, että kiintopisteitä on täsmälleen yksi. Jos x_∞ ja y_∞ ovat kiintopisteitä, niin

$$K d(x_\infty, y_\infty) \ge d(F(x_\infty), F(y_\infty)) = d(x_\infty, y_\infty) \,.$$

Oletuksen mukaan $K < 1$, joten $d(x_\infty, y_\infty) = 0$ ja $x_\infty = y_\infty$.

Viimeisen väitteen todistamiseksi huomataan, että kaikille $x \in X$ pätee

$$d(F^k(x), x_0) = d(F^k(x), F^k(x_0)) \le K^k\, d(F^k(x), x_0) \,. \quad \square$$

Sovelluksia: Newtonin menetelmä ja Picardin iteraatio

Derivoituvan funktion nollakohtia voi etsiä numeerisesti Newtonin menetelmällä: Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ avoin väli ja olkoon $f\colon I \to \mathbb{E}^1$ derivoituva. Arvataan, että pisteen x_0 lähellä voisi olla funktion f nollakohta. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,,$$

jossa tangenttisuora leikkaa x-akselin. Iteroidaan tätä prosessia: Oletetaan, että piste x_k on konstruoitu. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_k, f(x_k))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,,$$

jossa tangenttisuora leikkaa x-akselin. Näin voidaan tehdä tietenkin vain, jos $f'(x_k) \neq 0$.

Geometrisen tarkastelun sijaan Newtonin menetelmää voidaankin siis tarkastella kuvauksen

$$x \mapsto F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterointina. Kuvauksen F kiintopisteessä x_0 pätee $x_0 = F(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, siis $f(x_0) = x_0$.

Osoitamme seuraavaksi, että sopivilla oletuksilla Newtonin menetelmä antaa hyvän likiarvon nollakohdalle erittäin nopeasti.

Lause 6.13 (Newtonin menetelmä)**.** *Olkoon $f\colon I \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Olkoon $J_0 \subset I$ suljettu ja rajoitettu väli. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä J_0 ja että sen derivaatalla ei ole nollakohtaa välillä J_0. Olkoon $F\colon J_0 \to \mathbb{R}$,*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Tällöin on jokin väli $J \subset J_0 \subset I$ siten, että jono $F^k(x)$ suppenee kohti funktion f nollakohtaa eksponentiaalisella nopeudella kaikilla $x \in J$.

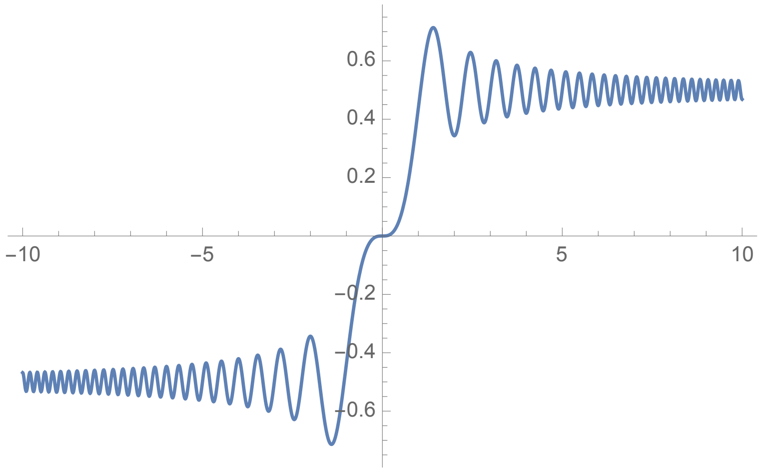
Todistus. Koska $F'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}$, niin funktion F kiintopisteessä x_0, joka on funktion f nollakohta, pätee $F'(x_0) = 0$. Siis jokaisella $0 < c < 1$ on pisteen x_0 ympäristö, jossa pätee $|F'(x)| \le c$. Tässä ympäristössä F on c-kutistava: Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on ξ pisteiden x_0 ja x välissä, jolle pätee

$$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0)\,.$$

Koska F on jatkuvasti derivoituva ja $|F'(x_0)| < 1$, niin jollain x_0-keskisellä välillä J pätee $|F'(y)| < K < 1$ jollain K kaikille $y \in J$. □

Esimerkki 6.14. Esimerkiksi optiikassa esiintyvä Fresnelin S-funktio $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{R}$

$$S(x) = \int_0^x \sin\Big(\frac{\pi}{2}\,t^2\Big)\,dt\,.$$



Kuva 6.1: Fresnelin S-funktio.

Etsitään Newtonin menetelmällä likiarvoa pienimmälle positiiviselle muuttujan x arvolle, jolla $S(x) = \frac{1}{2}$. Olkoon siis $h = S - \frac{1}{2}$. Arvataan kuvien 6.1 ja 6.2 perusteella, että funktion h nollakohta on pisteen $x_0 = 0.8$ lähellä. Olkoon $F_h(t) = t - \frac{h(t)}{h'(t)}$.

Ei ole kovin vaikea tarkastaa, että Newtonin menetelmässä käytettävä kuvaus

$$F_h'(x) = \pi\, t \left(S(x) - \frac{1}{2}\right) \cot \frac{\pi\, t^2}{2}$$

toteuttaa $|F_h'(x)| < \frac{1}{2}$ välillä $[0.8, 1.2]$. Koska funktion S nollakohta x_∞ on tällä välillä, pätee $|0.8 - x_\infty| \leq 0.4$. Lauseen 6.13 nojalla pätee

$$|F_h^k(0.8) - x_\infty| \leq \frac{1}{5}\,\frac{1}{2^k} < 0.001$$

kun $k \geq 8$.

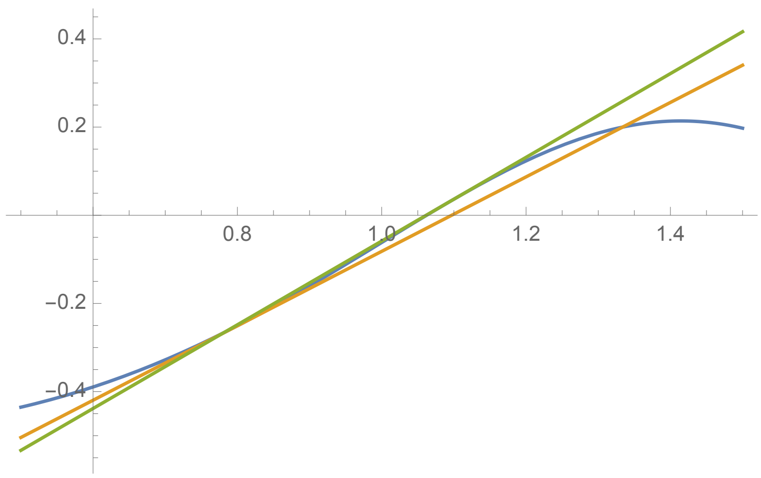
Kokeilemalla nähdään, että iteraatit suppenevat kohti nollakohtaa huomattavasti nopeammin kuin edellä arvioitiin:

k	t	$h(t)$	$F_h(t)$
	0.8	-0.251	1.09687
1	1.09687	0.0335346	1.06156
2	1.06156	-0.000585372	1.06215
3	1.06215	$-1.18172\ 10^{-7}$	1.06215

Kolmas ja neljäs iteraatti antavat siis saman arvon viiden desimaalin tarkkuudella. Näyttää siltä, että likiarvo jonon $(F_h^k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ raja-arvolle on löytynyt ja että se on funktion h nollakohta.

Esimerkki 6.15. Olkoon $f\colon \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ on M-Lipschitz ja olkoon $\delta < \frac{1}{M}$. Picardin operaattori $\mathscr{P}_{a,b}\mathrm{C}^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{E}^n)$ määritellään asettamalla

$$\mathscr{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s))ds$$



Kuva 6.2: Fresnelin S-funktion $\frac{1}{2}$-arvon etsiminen Newtonin menetelmällä graafisesti.

kaikille $\phi \in \mathrm{C}^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n)$. Nyt

$$\begin{aligned}\|\mathscr{P}_{a,b}(\phi) - \mathscr{P}_{a,b}(\psi)\|_\infty &= \max_{|t-a|\leq\delta} \left\| \int_a^t (f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s)))ds \right\| \\ &\leq \max_{|t-a|\leq\delta} \int_a^t \|f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))\|\, ds \\ &\leq \delta\, M\, \|\phi-\psi\|_\infty < \|\phi-\psi\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Siis Picardin operaattori on kutistava.

Analyysin peruslauseen nojalla funktio $x\colon]a-\delta, a+\delta[$ on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

ratkaisu, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin kiintopiste. Koska operaattori on kutistava, sillä on Banachin kiintopistelauseen nojalla täsmälleen yksi kiintopiste.

Harjoitustehtäviä

6.1. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Osoita, että tuloavaruus $X \times Y$ on täydellinen, jos ja vain jos X ja Y ovat täydellisiä.

6.2. Osoita, että euklidinen avaruus $\mathbb{E}^n$ on täydellinen metrinen avaruus.[3]

6.3. Onko Ranskan rautatieavaruus $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$ täydellinen metrinen avaruus?[4]

6.4. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot $X \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ epätyhjiä sisäkkäisiä suljettuja joukkoja. Oletetaan, että $\operatorname{diam}(E_k) \to 0$, kun $k \to \infty$. Osoita, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$$

[3] Katso Esimerkki 6.1.

[4] Ranskan rautatieavaruuden Cauchyn jonon alkioiden normien jonon tarkastelusta voi olla hyötyä.

jollain $x_0 \in X$.

6.5. Anna esimerkki homeomorfisista metrisistä avaruuksista X ja Y siten, että X on täydellinen ja Y ei ole täydellinen.

6.6. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Osoita, että Y on täydellinen, jos on surjektiivinen bi-Lipschitz-kuvaus $F\colon X \to Y$.

6.7. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoon $F\colon X \to X$ kuvaus, jolle F^p on kutistava jollain $p \in \mathbb{N}$. Osoita, että kuvauksella F on täsmälleen yksi kiintopiste.

Luku 7

Kompaktius

7.1 Kompaktit joukot

Kokoelma $(U_j)_{j\in J}$ on joukon B peite, jos $B \subset \bigcup_{j\in J} U_j$ ja se on avoin peite, jos joukot U_j ovat avoimia. Peite on äärellinen, jos indeksijoukko J on äärellinen. Jos $J' \subset J$, niin peite $(U_j)_{j\in J'}$ on peitteen $(U_J)_{j\in J}$ osapeite.

Esimerkki 7.1. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $x_0 \in X$. Kokoelma $(B(x_0, r))_{r>0}$ on metrisen avaruuden X avoin peite. Kokoelma $(B(x_0, n))_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ on peitteen $(B(x_0, r))_{r>0}$ osapeite.

Metrisen avaruuden X osajoukko A on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Esimerkki 7.2. (1) Äärelliset metriset avaruudet ovat kompakteja.

(2) Metrinen avaruus $\mathbb{E}^n$ ei ole kompakti koska sen avoimella peitteellä $(B(0, r))_{r>0}$ ei ole äärellistä osapeitettä: Peitteen pallot ovat sisäkkäisiä, joten jokaiselle äärelliselle $J \subset [0, \infty[$ pätee

$$\bigcup_{j\in J} B(0, j) = B(0, \max J) \subsetneq \mathbb{E}^n .$$

(3) Olkoon A ääretön joukko. Diskreetti metrinen avaruus (A, δ) ei ole kompakti koska sen avoimella peitteellä $\big\{\{a\} : a \in A\big\}$ ei ole avointa osapeitettä.

(4) Osoitamme luvussa 7.3, että euklidisen suoran $\mathbb{E}^1$ suljetut rajoitetut välit ovat kompakteja.

Propositio 7.3. *Kompakti joukko on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $K \subset X$ kompakti. Se, että joukon K tulee olla rajoitettu todistetaan samalla tavalla kuin Esimerkissä 7.2(2) osoitettiin, että $\mathbb{E}^n$ ei ole kompakti.

Osoitetaan sitten, että K on suljettu. Olkoon $x \in X - K$. Olkoon $U_k = X - \overline{B}(x, \frac{1}{k})$. Kokoelma $(U_k)_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}$ on kompaktin joukon K avoin peite. Siis on $n \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$K \subset U_n$, joten $B(x, \frac{1}{n}) \subset X - K$. Siis x on joukon K komplementin sisäpiste, joten K on suljettu. □

Luvussa 7.3 todistamme Heinen ja Borelin lauseen, jonka mukaan euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. Tämä kompaktien joukkojen luonnehdinta ei päde yleisesti.

Esimerkki 7.4. (1) Diskreetti metrinen avaruus on suljettu ja rajoitettu mutta Esimerkissä 7.2 huomasimme, että se ei ole kompakti, jos se ei ole äärellinen
(2) Metrinen avaruus $(]0,1], d_{\mathbb{E}})$ on suljettu[1] ja rajoitettu. Kokoelma

$$\left(\left] \frac{1}{k}, 1 \right] \right)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$$

on joukon $]0,1]$ avoin peite, jolla ei ole äärellistä osapeitettä: Jos $n \geq m$, niin $]\frac{1}{m}, 1] \subset]\frac{1}{n}, 1]$, joten jokaiselle äärelliselle osajoukolle $J \subset \mathbb{N} - \{0\}$ pätee

$$\bigcup_{j \in J} \left] \frac{1}{j}, 1 \right] = \left] \frac{1}{\max J}, 1 \right] \subsetneq]0,1] \,.$$

Propositio 7.5. *Olkoon X metrinen avaruus.*

(1) Jos X on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin E on kompakti.

(2) Jos $K \subset X$ on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin $E \cap K$ on kompakti.

(3) Jos $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset X$ ovat kompakteja, niin $\bigcup_{k=1}^n E_k$ on kompakti.

(4) Jos $A \neq \emptyset$ ja joukot $E_\alpha \subset X$ ovat kompakteja kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on kompakti.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 7.6. *Kompakti metrinen avaruus on separoituva.*

Todistus. Olkoon K kompakti. Joukon K peitteellä $(B(x, \frac{1}{k})_{x \in K})$ on äärellinen osapeite $B(x_{k1}, \frac{1}{k}), , \ldots, B(x_{kn_k}, \frac{1}{k})$. Joukko $\{x_{kj} : k \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq n_k\}$ on numeroituva tiheä osajoukko. □

Propositio 7.7. *Kompaktin metrisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste.*

Todistus. Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon $A \subset K$ joukko, jolla ei ole kasautumispisteitä. Jokaisella $x \in K$ on $r_x > 0$ siten, että

$$B(x, r_x) \cap A \subset \{x\} \,.$$

Avaruuden K avoimella peitteellä $(B(x, r_x))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite. Siis joukko A on äärellinen. □

Seuraus 7.8. *Kompakti metrinen avaruus on täydellinen.*

[1] Koska koko avaruus on suljettu osajoukko.

Todistus. Harjoitustehtävä. Seuraa Propositiosta 7.7 ja Lemmasta 5.11. □

Metrisen avaruuden X osajoukko A on jonokompakti, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä.

Lause 7.9 (Lebesguen peitelause)**.** *Olkoon J jonokompakti joukko ja olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ sen avoin peite. Tällöin on $\lambda > 0$ siten, että jokaiselle $x \in J$ on $\alpha \in A$, jolle $B(x, \lambda) \subset U_\alpha$.*

Lebesguen peitelauseen antama luku λ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ Lebesguen luku.

Todistus. Oletetaan, että peitteellä $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ei ole Lebesguen lukua. Tällöin jokaisella $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on $x_n \in J$, jolle $B(x_n, \frac{1}{n})$ ei ole avoimen joukon U_α osajoukko millään $\alpha \in A$. Jonolla $(x_k)_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}$ on suppeneva osajono $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}-\{0\}}$, koska J on jonokompakti.

Olkoon $x_\infty = \lim_{j\to\infty} x_{k_j}$. Koska $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ on avoin peite, on $\alpha_\infty \in A$ ja $r_\infty > 0$, joille $x_\infty \in B(x_\infty, r_\infty) \subset U_{\alpha_\infty}$. Kolmioepäyhtälön nojalla $B(x_{k_j}, \frac{r_\infty}{2}) \subset U_{\alpha_\infty}$ suurilla j. Mutta riittävän suurilla j pätee $\frac{1}{k_j} < \frac{r_j}{2}$, joten $B(x_{k_j}, \frac{1}{k_j}) \subset U_{\alpha_\infty}$ suurilla j. Tämä on ristiriita. □

Lause 7.10. *Metrisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti.*

Todistus. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $K \subset X$ kompakti. Olkoon $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono, jolle pätee $y_k \in K$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x,1))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite $\big(B(x_1^1, 1), \dots B(x_{n_1}^1, 1)\big)$. Joukko

$$I_1 = \{n \in \mathbb{N} : y_n \in B(x_{k_1}^1, 1)\}$$

on ääretön jollain $k_1 \in \{1, \dots, n_1\}$. Jonolla $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$, jolle $y_{1j} \in B(x_{k_1}^1, 1)$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.

Muodostamme osajonon jonolle $(y_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ samalla tavalla: Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, \frac{1}{2}))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite $\big(B(x_1^2, \frac{1}{2}), \dots B(x_{n_2}^2, \frac{1}{2})\big)$. Joukko

$$I_2 = \{n \in I_1 : y_i \in B(x_{k_2}^2, \frac{1}{2})\}$$

on ääretön jollain $k_2 \in \{1, \dots, n_2\}$. Jonolla $(y_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$, jolle $y_{2j} \in B(x_{k_2}^2, \frac{1}{2})$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.

Jatkamme induktiolla: Oletetaan, että on konstruoitu jono $(y_{Nk})_{k\in\mathbb{N}}$. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, \frac{1}{N}))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite $\big(B(x_1^N, \frac{1}{N}), \dots B(x_{n_N}^N, \frac{1}{N})\big)$. Jonolla $(y_{Nk})_{k\in\mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{(N+1)j})_{j\in\mathbb{N}}$, jolle $y_{(N+1)j} \in B(x_{k_N}^N, \frac{1}{N})$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Diagonaalisesti muodostettu alkuperäisen jonon $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$osajono $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} = (y_{jj})_{j\in\mathbb{N}}$ on konstruktion perusteella Cauchyn jono, joten se suppenee Proposition 7.8 nojalla.

Oletetaan sitten, että K on jonokompakti. Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ joukon K avoin peite ja olkoon λ sen Lebesguen luku. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x,\lambda))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite, sillä muuten löydämme seuraavalla konstruktiolla jonon, jolla ei ole suppenevaa osajonoa: Valitaan $x_0 \in K$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ valitaan $x_{n+1} \in K - \bigcup_{j=0}^{n} B(x_j, \lambda)$. Näin saadulle jonolle pätee $d(x_r, x_s) > \lambda$ kaikilla $r \neq s$, joten sillä ei ole suppenevaa osajonoa.

On siis $N \in \mathbb{N}$ ja pisteet $x_1, x_2, \ldots, x_N$, joille $K \subset \bigcup_{n=0}^{N} B(x_n, \lambda)$. Oletuksen mukaan jokaisella $1 \leq n \leq N$ on $\alpha_n \in A$, jolle $B(x_n, \lambda) \subset U_{\alpha_n}$. Siis

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{N} B(x_n, \lambda) \subset \bigcup_{n=0}^{N} U_{\alpha_n}$$

joten $(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_N})$ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ äärellinen osapeite. □

Propositio 7.11. *Olkoot X ja Y kompakteja metrisiä avaruuksia. Tällöin $X \times Y$ on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

7.2 Kompaktit joukot ja jatkuvat kuvaukset

Propositio 7.12. *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva. Olkoon $K \subset X$ kompakti. Olkoon $(U_j)_{j \in J}$ joukon $f(K)$ avoin peite. Tällöin $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$ on kompaktin joukon K avoin peite. Sillä on siis äärellinen osapeite $(f^{-1}(U_j))_{j \in J'}$. Siis $(U_j)_{j \in J'}$ on joukon K äärellinen peite, joten $f(K)$ on kompakti. □

Kompaktius on topologinen ominaisuus:

Propositio 7.13. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h\colon X \to Y$ homeomorfismi. Tällöin X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 7.14. *Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Jos kuvaus $f\colon K \to Y$ on jatkuva, niin se on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kokoelma $\left(f^{-1}(B(y, \frac{\varepsilon}{2}))\right)_{y \in Y}$ on avaruuden K avoin peite. Olkoon δ tämän peitteen Lebesguen luku. Olkoot $a, b \in K$ siten, että $d(a, b) < \delta$. Säteen δ määritelmän nojalla on $y \in Y$ siten, että $a, b \in B(a, \delta) \subset f^{-1}\left(B(y, \frac{\varepsilon}{2})\right)$. Siis

$$d(f(a), f(b)) \leq \ d(f(a), y) + d(y, f(b)) \leq \varepsilon\,,$$

joten f on tasaisesti jatkuva. □

Lause 7.15. *Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Jos $f\colon K \to Y$ on jatkuva bijektio, niin f on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon $E \subset K$ suljettu. Proposition 7.5(1) nojalla E on kompakti. Proposition 7.12 nojalla $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ on kompakti ja siis Proposition 7.3 nojalla se on suljettu. Lauseen 3.5(2) nojalla f^{-1} on jatkuva. □

Propositio 7.16. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $K \subset X$ kompakti. Tällöin jokaisella $x \in X$ on $x_K \in K$, jolle $d(x, K) = d(x, x_K)$.*

Todistus. Harjoitustehtävässä 3.10 osoitettiin, että kuvaus $d_x\colon K \to \mathbb{E}^1$ on jatkuva, joten se saavuttaa miniminsä jossain pisteessä $x_K \in K$. Määritelmän nojalla $d(x, K) = d(x, x_K)$. □

7.3 Kompaktit joukot euklidisessa avaruudessa

Lause 7.17 (Heinen ja Borelin lause)**.** *Euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Lauseen toisen suunnan väite seuraa Propositiosta 7.3. Lauseen 7.10 nojalla riittää osoittaa, että jokainen euklidisen avaruuden epätyhjä suljettu ja rajoitettu joukko $S \subset \mathbb{E}^n$ on jonokompakti.

Olkoon $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono, jolle $s_k \in S$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska S on rajoitettu, on $M > 0$, jolle pätee $S \subset I_0 = [-M, M]^n$. Jaetaan I_0 koordinaattihypertasoilla $\{x \in \mathbb{E}^n : x_j = 0\}$ 2^n yhtäsuureen M-sivuiseen suljettuun n-väliin $I_1^1, \dots I_1^{2^n}$, joiden keskinäiset leikkaukset sisältyvät koordinaattihypertasoihin. Olkoon I_1 sellainen näistä n-väleistä, jolle joukko $\{n \in \mathbb{N} : s_n \in I_1\}$ on ääretön. Olkoon $(s_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ jonon $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu väliin I_1 kuuluvista pisteistä.

Jaetaan sitten I_1 samalla tavalla 2^n yhtäsuureen $\frac{M}{2}$-sivuiseen n-väliin $I_2^1, \dots I_2^{2^n}$ koordinaattihypertasojen kanssa yhdensuuntaisilla hypertasoilla. Olkoon I_2 sellainen näistä n-väleistä, jolle joukko $\{n \in \mathbb{N} : s_n \in I_2\}$ on ääretön. Olkoon $(s_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ jonon $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu väliin I_2 kuuluvista pisteistä.

Induktiolla saadaan sisäkkäiset suljetut rajoitetut välit $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ ja osajonot $(s_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$, jotka koostuvat väliin I_k kuuluvista pisteistä jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Diagonaalisesti pisteistä $z_k = s_{kk}$ muodostettu jono $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on jonon $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ osajono, joka suppenee kohti Cantorin leikkauslauseen 6.9 antamaa pistettä $s_\infty \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \cap S$. □

Seuraus 7.18 (Bolzanon ja Weierstrassin lause jonoille)**.** *Euklidisen avaruuden rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Tämä väite tuli todistetuksi Heinen ja Borelin lauseen todistuksessa! □

Seuraus 7.19 (Bolzanon ja Weierstrassin lause joukoille)**.** *Euklidisen avaruuden äärettömällä rajoitetulla osajoukolla $A \subset \mathbb{E}^n$ on kasautumispiste. Jos A on suljettu, niin kasautumispiste on joukossa A.*

Todistus. Seuraa Bolzanon ja Weierstrassin lauseesta jonoille. Harjoitustehtävä. □

Lause 7.20 (Weierstrassin lause)**.** *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $K \subset X$ kompakti ja olkoon $f \colon X \to \mathbb{E}^1$ jatkuva. Tällöin on $x_0, y_o \in K$, joille pätee*

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

ja

$$f(y_0) = \min\{f(x) : x \in K\} .$$

Todistus. Proposition 7.12 nojalla kuvajoukko $f(K) \subset \mathbb{E}^1$ on kompakti. Heinen ja Borelin lauseen nojalla se on suljettu ja rajoitettu. Siis $\sup f(K), \inf f(K) \in f(K)$, joten $\sup f(K) = \max f(K)$ ja $\inf f(K) = \min f(K)$. □

Esimerkki 7.21. Euklidisen avaruuden pallot ja pallopinnat ovat kompakteja Heinen ja Borelin lauseen nojalla. Lauseen 4.9 todistuksessa sovelsimme Weierstrassin lausetta kompaktilla pallopinnalla.

Seuraus 7.22 (Weierstrassin lause)**.** *Kompaktilla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.* □

Harjoitustehtäviä

7.1. Ovatko Ranskan rautatieavaruuden $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$:n suljetut pallot kompakteja?

7.2. Todista Proposition 7.5 kohdat (1) ja (2).

7.3. Todista Proposition 7.5 kohdat (3) ja (4).

7.4. Osoita, että kompakti metrinen avaruus on täydellinen.

7.5. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h\colon X \to Y$ homeomorfismi. Osoita, että X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.

7.6. Todista Propositio 7.14 suoraan jatkuvuuden määritelmän avulla käyttämättä Lebesguen peitelausetta.

7.7. Olkoot X ja Y kompakteja metrisiä avaruuksia. Osoita, että $X \times Y$ on kompakti.

7.8. Todista Seuraus 7.19.

7.9. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon ja olkoon $K \subset X$ kompakti, $K \neq \emptyset$. Osoita, että on $a, b \in K$, joille pätee

$$d(a,b) = \operatorname{diam}(K)\,.$$

7.10. Anna esimerkki, joka osoittaa, että Proposition 7.16 väite ei päde, jos oletetaan, että K on vain suljettu.

7.11. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon

$$\mathscr{K}(X) = \{A \subset X : A \text{ on kompakti}\}\,.$$

Osoita, että lauseke

$$D(A,B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subset B^{\varepsilon} \text{ ja } \; B \subset A^{\varepsilon}\}$$

määrää metriikan joukossa $\mathscr{K}(X)$.[2]

7.12. Miksi tehtävässä 7.11 rajoitutaan kompaktien osajoukkojen joukkoon?

[2] Joukon E ε-paksunnos E^{ε} määriteltiin Harjoitustehtävän 2.11 yhteydessä.

Olkoot $I_0 = [0,1] \subset \mathbb{E}^1$, $I_1^0 = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_1^1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Välit I_1^0 ja I_1^1 ovat siis ne kaksi suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun välistä I_0^0 poistetaan keskeltä avoin väli $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Olkoot

$$I_2^0 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right], \quad I_2^1 = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right], \quad I_2^2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right], \quad I_2^3 = \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$$

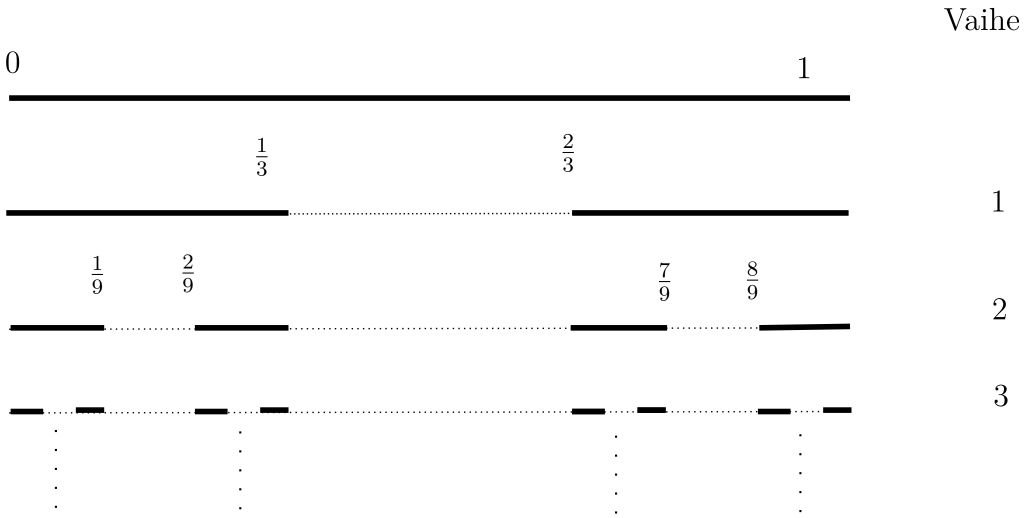
ne neljä suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun väleistä I_1^0 ja I_1^1 poistetaan keskeltä avoimet välit, joiden pituus on $\frac{1}{3^2}$. Jatketaan induktiolla: Vaiheessa n on 2^n suljettua väliä $I_n^0, I_n^1, \dots, I_n^{2^n-1}$. Jokaisen välin I_n^k pituus on 3^{-n}. Näistä väleistä muodostetaan vaiheen $n+1$ välit poistamalla jokaisesta keskeltä avoin väli, jonka pituus on $3^{-(n+1)}$.

Olkoon

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k .$$

Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko on

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k .$$



Olkoon $a \in \Sigma$ ja olkoon

$$k_n(a) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, 2^j \in \mathbb{N}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Cantorin joukon pisteen $x \in K$ osoite on $a = i(x) \in \Sigma$,[a] jolle pätee

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{n+1}^{k_n(a)} .$$

[a] Σ on ennen Harjoitustehtävää 2.18 määritelty kahden symbolin jonoavaruus.

7.13. Osoita, että Cantorin joukko on epätyhjä kompakti joukko.

7.14. Osoita, että osoitekuvaus i on homeomorfismi.

7.15. Osoita, että Cantorin joukko on ylinumeroituva.

Luku 8

Yhtenäisyys

8.1 Yhtenäiset joukot

Metrinen avaruus X on yhtenäinen, jos ei ole avoimia epätyhjiä joukkoja U ja V, joille pätee $U \sqcup V = X$. Metrisen avaruuden (X, d_X) osajoukko E on yhtenäinen, jos metrinen avaruus (E, d_X) on yhtenäinen.

Metrisen avaruuden X osajoukko E on yhtenäinen, jos ja vain jos ei ole avaruuden X avoimia epätyhjiä joukkoja U ja V, joille pätee $(U \cap E) \sqcup (V \cap E) = E$.

Esimerkki 8.1. (0) Tyhjä joukko on yhtenäinen.

(1) Diskreetti metrinen avaruus on yhtenäinen, jos ja vain jos se koostuu yhdestä pisteestä.

(2) Ultrametrinen avaruus on yhtenäinen, jos ja vain jos se koostuu yhdestä pisteestä: Olkoon X ultrametrinen avaruus ja olkoot $x, y \in X$. Olkoon $r > 0$ siten, että $y \in X - B(x, r)$. Harjoitustehtävässä 2.15 osoitettiin, että $B(x, r)$ on avoin ja suljettu joukko. Siis $X - B(x, r)$ on avoin $X = B(x, r) \sqcup (X - B(x, r))$.

Usein epäyhtenäisyys on helpompi osoittaa kuin yhtenäisyys. Luvussa 8.2 selvitämme avaruuden $\mathbb{E}^1$ yhtenäiset joukot ja tämän luvun ja luvun 8.3 tulosten avulla saamme lisää esimerkkejä.

Propositio 8.2. *Olkoon X metrinen avaruus.*

(1) X on yhtenäinen, jos ja vain jos ei ole suljettuja epätyhjiä joukkoja $F \subset X$ ja $G \subset X$, joille pätee $F \sqcup G = X$.

(2) Olkoon $A \subset X$ yhtenäinen ja olkoot U ja V avaruuden X avoimia osajoukkoja, joille pätee $U \cap V = \emptyset$ ja $A \subset U \cup V$. Tällöin $A \subset U$ tai $A \subset V$.

Todistus. (1) Avaruus X on erillinen yhdiste avoimista joukoista U ja V, jos ja vain jos se on erillinen yhdiste suljetuista joukoista U ja V.

(2) Väite on selvästi yhtäpitävä yhtenäisyyden määritelmän kanssa. $\square$

Seuraava epäyhtenäisyyden karakterisointi on joskus käyttökelpoinen:

Propositio 8.3. *Olkoon X metrinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on epäyhtenäinen, jos ja vain jos on jatkuva surjektio $f\colon A \to \{0,1\}$.*

Todistus. Oletetaan, että A on epäyhtenäinen. On siis avoimet joukot $U, V \subset X$, joille $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ ja $A \subset U \sqcup V$. Määritellään funktio $f\colon A \to \{0,1\}$ asettamalla

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } a \in U \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases} .$$

Funktio f on surjektio koska A leikkaa molempia joukkoja U ja V. Se on jatkuva koska $f^{-1}(0)$ ja $f^{-1}(1)$ ovat avoimia joukkoja metrisessä avaruudessa A.

Oletetaan, että on jatkuva surjektio $f\colon A \to \{0,1\}$. Tällöin $f^{-1}(0)$ ja $f^{-1}(1)$ ovat avoimia epätyhjiä erillisiä joukkoja, ja $A = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. □

Seuraus 8.4. *Olkoon X metrinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on yhtenäinen, jos ja vain jos jokainen kokonaislukuarvoinen funktio $f\colon X \to \mathbb{E}^1$ on vakio.* □

Lemma 8.5. *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $A \neq \emptyset$ ja olkoot Y_α yhtenäisiä osajoukkoja kaikilla $\alpha \in A$ siten, että $\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset$. Tällöin $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoot U ja V avoimia erillisiä joukkoja, joille pätee $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset U \cup V$. Jokaisellle joukolle Y_α pätee joko $Y_\alpha \subset U$ tai $Y_\alpha \subset V$ Proposition 8.2 nojalla. Jos $Y_{\alpha_0} \subset U$ jollain $\alpha_0 \in A$, niin $Y_\alpha \subset U$ kaikilla α koska $Y_\alpha \cap Y_{\alpha_0} \neq \emptyset$ ja Y_α on yhtenäinen. Siis $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset U$. Koska tämä pätee kaikille erillisille avoimille joukoille U ja V, seuraa, että $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ on yhtenäinen. □

Propositio 8.6. *Jos E on yhtenäinen ja $E \subset A \subset \overline{E}$, niin A on yhtenäinen. Erityisesti yhtenäisen joukon sulkeuma on yhtenäinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 8.7. *Yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva. Oletetaan, että $f(X)$ ei ole yhtenäinen. Tällöin on avoimet joukot $U, V \subset Y$, joille $U \cap f(X) \neq \emptyset$, $V \cap f(X) \neq \emptyset$ ja $(U \cap f(X)) \sqcup (V \cap f(X)) = f(X)$. □

Seuraus 8.8. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h\colon X \to Y$ homeomorfismi. Tällöin X on yhtenäinen, jos ja vain jos Y on yhtenäinen.* □

8.2 Yhtenäiset joukot avaruudessa $\mathbb{E}^1$

Propositio 8.9. *Jos $A \subset \mathbb{E}^1$ on yhtenäinen, niin $A = \emptyset$, $A = \mathbb{E}^1$ tai A on väli tai yhden pisteen joukko.*

Todistus. Oletetaan, että $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{E}^1$ ei ole väli eikä yhden pisteen joukko. Tällöin on $a_1, a_2 \in A$ ja $b \in \mathbb{E}^1 - A$, joille pätee $a_1 < b < a_2$. Tällöin

$$A = \Big(A \cap \left]-\infty, b\right[\Big) \sqcup \Big(A \cap \left]b, \infty\right[\Big) ,$$

joten A ei ole yhtenäinen. □

Propositio 8.10. *Euklidinen avaruus* $\mathbb{E}^1$ *ja avaruuden* $\mathbb{E}^1$ *välit ovat yhtenäisiä.*

Todistus. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ väli tai $\mathbb{E}^1$. Oletetaan, että se ei ole yhtenäinen. Tällöin on avoimet joukot A ja B siten, että $(A \cap I) \sqcup (B \cap I) = I$, $A \cap I \neq \emptyset$ ja $B \cap I \neq \emptyset$. Erityisesti on $a \in A \cap I$ ja $b \in B \cap I$. Voimme olettaa, että $a < b$.

Koska I on väli, $[a, b] \subset I$. Olkoon $c = \sup(A \cap [a, b])$. Koska A on avoin ja $b \notin A$, pätee $c \notin U$. Siis $c \in B$. Mutta B on avoin ja $c < b$, joten on $r > 0$ siten, että $]c - r, c + r[= B(c, r) \subset B \cap I$. Mutta tällöin $c - r$ on joukon $A \cap I$ yläraja, joten $\sup(A \cap I) \leq c - r < c = \sup(A \cap I)$, mikä on ristiriita. Siis I on yhtenäinen. □

Seuraus 8.11 (Bolzanon lause)**.** *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbb{E}^1$ *jatkuva funktio, jolle* $f(a)f(b) < 0$*. Tällöin on* $c \in]a, b[$*, jolle pätee* $f(c) = 0$*.*

Todistus. Proposition 8.10 nojalla väli $[a, b]$ on yhtenäinen. Proposition 8.7 nojalla kuvajoukko $f([a, b])$ on yhtenäinen, joten se on väli tai piste. Oletuksen nojalla kuvajoukossa on enemmän kuin yksi piste, joten $f([a, b])$ on väli. Oletuksen nojalla $f(a) > 0$ ja $f(b) > 0$ tai päinvastoin, joten kuvajoukossa, joka on väli, on positiivisia ja negatiivisia lukuja. Siis $0 \in f([a, b])$. □

8.3 Polkuyhtenäisyys

Olkoon X metrinen avaruus. Jatkuva kuvaus kompaktilta väliltä $I \subset \mathbb{E}^1$ avaruuteen X on polku. Polku $\gamma : [a, b] \to X$ yhdistää pisteet $x_1 \in X$ ja $x_2 \in X$, jos $\{\gamma(a), \gamma(b)\} = \{x_1, x_2\}$. Polku $\gamma : I \to X$ yhdistää pisteet $x_1 \in E$ ja $x_2 \in E$ joukossa $E \subset X$, jos γ yhdistää pisteet x_1 ja x_2 ja $\gamma(I) \subset E$. Polun $\gamma : I \to X$ jälki on $|\gamma| = \gamma(I)$.

Joukko $E \subset X$ on polkuyhtenäinen, jos kaikille $x, y \in E$ on polku, joka yhdistää ne joukossa E.

Propositio 8.12. *Jos* E *on polkuyhtenäinen, niin se on yhtenäinen.*

Todistus. Suljettu väli on Proposition 8.10 nojalla yhtenäinen. Polun kuva on yhtenäinen Proposition 8.7 nojalla. Olkoon $x_0 \in E$. Jokaisella $x \in E$ on polku γ_x, joka yhdistää pisteet x_0 ja x. Siis $E = \bigcup_{x \in E} |\gamma_x|$ ja $x_0 \in \bigcap_{x \in E} |\gamma_x|$, joten E on yhtenäinen Lemman 8.5 nojalla. □

Propositio 8.13. *Polkuyhtenäisen joukon kuva jatkuvalla kuvauksella on polkuyhtenäinen.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $F : X \to Y$ jatkuva. Olkoon $A \subset X$ polkuyhtenäinen. Olkoot $y, z \in F(A)$. Tällöin on pisteet $y_A, z_A \in A$, joille pätee $F(y_A) = y$ ja $F(z_A) = z$. Koska A on polkuyhtenäinen, on polku $\gamma : [0, 1] \to A$, joka yhdistää pisteet y_A ja z_A joukossa A. Polku $F \circ \gamma$ yhdistää pisteet y ja z. □

Esimerkki 8.14. $\mathbb{E}^n$ on polkuyhtenäinen kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$: Olkoot $A, B \in \mathbb{E}^n$. Olkoon $j : [0, 1] \to \mathbb{E}^n$ kuvaus

$$j(t) = A + t\,(B - A)\,.$$

Tällöin j on selvästi jatkuva ja sille pätee $j(0) = A$ ja $j(1) = B$.

Esimerkki 8.15. Pallon pinta $S(0,1) \subset \mathbb{E}^n$ on polkuyhtenäinen: Olkoot $A, B \in \mathbb{E}^n$, $\|A\| = \|B\| = 1$, $A \neq \pm B$ ja olkoon $j_{A,B} \colon \mathbb{R} \to S(0,1)$ kuvaus

$$j_{A,B}(t) = A \cos t + \frac{B - (A|B)A}{\sqrt{1 - (A|B)^2}} \sin t \,.$$

Tällöin $j_{A,B}$ on selvästi jatkuva ja sille pätee $j_{A,B}j(0) = A$ ja $j_{A,B}(\arccos(A \mid B)) = B$, joten $j_{A,B}|_{[0,\arccos(A|B)]}$ on polku, joka yhdistää pisteet A ja B.

Kuvaus $j_{A,B}$ parametrisoi yksikäsitteisen isoympyrän, jolla pisteet A ja B ovat. Huomaa, että $j_{A,B}(\pi) = -A$, joten $j_{A,B}|_{[0,\pi]}$ on polku, joka yhdistää pisteet A ja $-A$.

Seuraus 8.16. *Avaruudet $\mathbb{E}^1$ ja $\mathbb{E}^n$ eivät ole homeomorfisia, jos $n \geq 2$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 8.17. *Kaikki euklidisen avaruuden avoimet yhtenäiset osajoukot ovat polkuyhtenäisiä.*

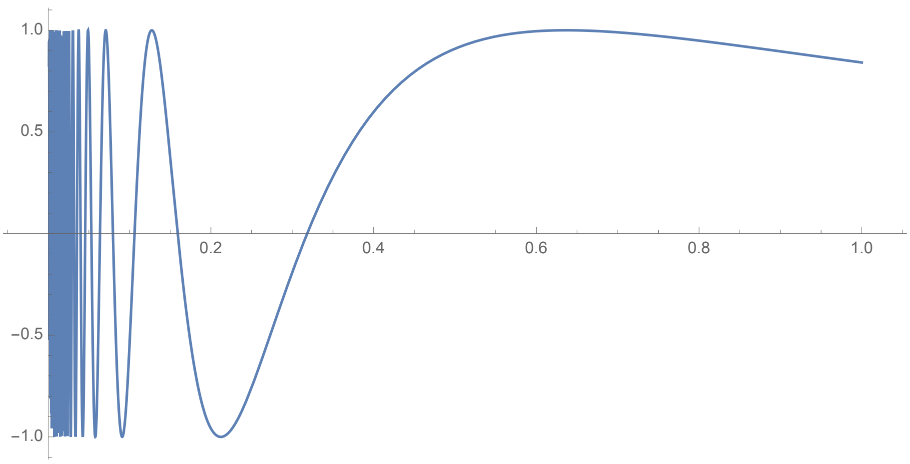
Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 8.18 (Topologin sinikäyrä)**.** Joukko

$$S_0 = \left\{ \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) : t > 0 \right\}$$

on polkuyhtenäinen koska se on polkuyhtenäisen joukon $[0,\infty]$ kuva jatkuvalla kuvauksella $g \colon [0,\infty] \to \mathbb{E}^2$, $g(t) = (t, \sin\left(\frac{1}{t}\right))$. Topologin sinikäyrä on joukko

$$S = S_0 \cup \{0\} \,.$$



Kuva 8.1: Topologin sinikäyrä

Proposition 8.6 nojalla topologin sinikäyrä on yhtenäinen, koska

$$S_0 \subset S \subset \overline{S_0} = S_0 \cup \Big(\{0\} \times [-1,1] \Big) \,.$$

Joukkoa $\overline{S_0}$ kutsutaan suljetuksi topologin sinikäyräksi. Harjoituksissa osoitetaan, että suljettu topologin sinikäyrä ei ole polkuyhtenäinen.

8.4 Relatiivitopologiaa

Metrisen avaruuden (X, d_X) osajoukko E on yhtenäinen täsmälleen silloin, kun metrinen avaruus (E, d_X) on yhtenäinen. Tämä johtuu seuraavasta havainnosta:

Propositio 8.19. *Olkoon (X, d_X) metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$ epätyhjä osajoukko. Joukko $U_E \subset E$ on avoin metrisessä avaruudessa (E, d_X), jos ja vain jos on avoin joukko U metrisessä avaruudessa (X, d_X), jolle $U_E = U \cap E$.*

Todistus. Todistuksen selventämiseksi käytämme merkintöjä

$$B_E(e, r) = \{x \in E : d_X(x, e) < r\}$$

ja

$$B_X(e, r) = \{x \in X : d_X(x, e) < r\}.$$

Olkoon U_E subset E avoin. Jokaisella $e \in U_E$ on siis $r_e > 0$, jolle $B_E(e, r_e) \subset U_E$. Metrisen avaruuden X osajoukko $U = \bigcup_{e \in E} B_X(e, r_e)$ on avoin ja sille pätee $U \cap E = E_E$.

Jos taas U on avoin avaruudessa (X, d_X), niin jokaiselle $e \in E \cap U$ on $r_e > 0$, jolle $B_X(e, r_e) \subset U$. Koska $B_E(e, r_e) = B_X(r, e) \cap E$, saadaan $B_E(e, r_e) \subset U \cap E$ jokaisella $e \in U \cap E$, joten $U \cap E$ on avoin avaruudessa (E, d_X). $\square$

Harjoitustehtäviä

8.1. Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $E \subset X$ yhtenäinen joukko ja olkoon $x \in \partial E$. Osoita, että $E \cup \{x\}$ on yhtenäinen.

8.2. Osoita, että metrinen avaruus X on yhtenäinen, jos ja vain jos $\emptyset$ ja X ovat avaruuden X ainoat osajoukot, jotka ovat avoimia ja suljettuja.

8.3. Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $E \subset X$ yhtenäinen joukko ja olkoon $F \subset X$ joukko, jolle pätee $E \subset F \subset \overline{E}$. Osoita, että F on yhtenäinen.

8.4. Osoita, että maapallolla on vastakkaiset pisteet, joissa on sama lämpötila.[1]

8.5. Osoita, että $\mathbb{E}^n - \{0\}$ on polkuyhtenäinen, jos $n \geq 2$.

8.6. Osoita, että avaruudet $\mathbb{E}^1$ ja $\mathbb{E}^n$ eivät ole homeomorfisia, jos $n \geq 2$.

8.7. Osoita, että kaikki euklidisen avaruuden avoimet yhtenäiset osajoukot ovat polkuyhtenäisiä.[2]

8.8. Osoita, että suljettu topologin sinikäyrä ei ole polkuyhtenäinen.[3]

[1]Ajatellaan, että lämpötila on jatkuva funktio $f\colon S(0, R) \to \mathbb{E}^1$. Tarkastele funktiota $g\colon S(0, R) \to \mathbb{E}^1$, $g(x) = f(x) - f(-x)$.

[2]Valitse joukosta jokin piste ja tarkastele niiden pisteiden joukkoa, jotka voidaan yhdistää sen kanssa ja niiden pisteiden joukkoa, joita ei.

[3]Kysymystä voi lähestyä esimerkiksi näin: Olkoon $\gamma\colon [0, 1] \to S$ polku, jolle pätee $\gamma(0) = 0$ ja $\gamma(1) \neq 0$. Olkoon $p_1\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ projektio ensimmäiselle koordinaatille. Kuvaus $p_1 \circ \gamma$ on polku. Voidaan olettaa, että $0 = \max\{t \in [0, 1] : p_1 \circ \gamma(t) = 0\}$. Mitä voit päätellä välien $[0, \delta]$ kuvajoukoista?

Kirjallisuutta

[Bou] N. Bourbaki. General topology. Chapters 1–4. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. Metric spaces of non-positive curvature, volume 319 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1999.

[BBT] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, and B. S. Thomson. Real analysis. `http://classicalrealanalysis.info/`, 2nd edition, 2008.

[Pit] C. G. C. Pitts. Introduction to metric spaces. Oliver & Boyd [Longman Group Ltd.], Edinburgh, 1972. `https://archive.org/details/IntroductionToMetricSpaces`.

[SV] K. Suominen and K. Vala. Topologia I. Limes ry, 1987.

[TBB] B. S. Thomson, J. B. Bruckner, and A. M. Bruckner. Elementary real analysis. `http://classicalrealanalysis.info/`, 2nd edition, 2008.

[Väi1] J. Väisälä. Topologia II. Limes ry, 1983.

[Väi2] J. Väisälä. Topologia I. Limes ry, 2007.