

Geometrian jatkokurssi
Harjoitus 5, 4.12.2014

1. Olkoot $v_1, v_2 \in \mathbb{M}^{1,n}$. Oletetaan, että v_1 on valonluonteinen ja v_2 on ajanluonteinen. Osoita, että $\langle v_1 | v_2 \rangle \neq 0$.

2. Hyperbolisilla funktioilla $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ja $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ on trigonometrinen funktioiden yhteenlaskukaavoja

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$$

ja

$$\sin(s + t) = \cos s \sin t + \sin s \cos t$$

vastaavat kaavat. Mitkä nämä kaavat ovat? Todista ne.

3. Olkoon $a \in \mathbb{H}^n$ ja olkoon $u \in a^\perp$ siten, että $\langle u | u \rangle = 1$. Osoita, että kuvaus $j_{a,u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$,

$$j_{a,u}(t) = a \cosh(t) + u \sinh(t),$$

on geodeesinen viiva.

4. Olkoot $p, q \in \mathbb{H}^n$ ja olkoon

$$u = \frac{q + \langle p | q \rangle p}{|q + \langle p | q \rangle p|}.$$

Osoita, että $j_{p,u}(d_{\mathbb{H}^n}(p, q)) = q$.

5. Todista hyperbolisen geometrian toinen kosinilause.

6. Millaisia ovat hyperbolisen tason tasasivuiset kolmiot?

7. Millaisia joukkoja hyperbolisen tason pallot ovat hyperboloidimallissa?