Johdatus dynaamisiin systeemeihin 2022

Harjoitus 6: ratkaisuja

1. Todista Lemma 7.4.

Todistus. Jonoavaruuksien Σ_A ja Ω_A määritelmässä matriisi A määrittelee, mitkä symbolit saavat seurata toisiaan. Olkoon $\omega \in \Sigma_A$ ja olkoon $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$A_{\sigma\omega(k)\sigma\omega(k+1)} = A_{\omega(k+1)\omega(k+2)} = 1 \,.$$

Siis $\sigma\omega \in \Sigma_A$. Kaksipuolisten jonoavaruuksien tapaus todistetaan samalla havainnolla.

Olkoon $\omega \in \Sigma_N - \Sigma_A$. Tällöin on $k \in \mathbb{N}$, jolle $A_{\omega(k)\omega(k+1)} = 0$. Sama pätee kaikille $\omega' \in C^{k<k+1}_{\omega(k)\omega(k+1)}$, joten sylinteri $C^{k<k+1}_{\omega(k)\omega(k+1)}$ on alkion ω avoin ympäristö avaruudessa Σ_N. □

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osoita, että jonoavaruudet Σ_A ja Ω_A ovat ylinumeroituvia.

Todistus. Jonoja, joissa muodostetaan kaikki mahdolliset jonot symboleista 01 ja 11 on ylinumeroituva määrä. Kaikki nämä sisältyvät avaruuksiin Σ_A tai Ω_A. □

3. Osoita, että kaikki joukon $[0,1[^2 \cap \mathbb{Q}^2$ pisteet ovat Arnoldin kissakuvauksen jaksollisia pisteitä. [1]

Todistus. Olkoon x piste, jonka koordinaatit ovat rationaalilukuja. Tällöin $x = (\frac{p}{q}, \frac{r}{q})$ jollain $p, q, r \in \mathbb{N}$. Tällöin rationaaliluvut eivät välttämättä ole supistetussa muodossa. Joukko $E_q = \{(\frac{a}{q}, \frac{b}{q}) : 0 \leqslant a, b \leqslant q\}$ on äärellinen ja $\mathscr{O}^+_{\overline{L}}(x) \in E_q$, joten $\mathscr{O}^+_{\overline{L}}(x) \in E_q$ on äärellinen. Koska $\overline{L}$ on bijektio, tästä seuraa, että x on jaksollinen. □

4. Lineaarikuvaus $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$S(x) = (x_1 + x_2, x_2)\,,$$

määrää kuvauksen $\overline{S}\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$\overline{S}(x + \mathbb{Z}^2) = S(x) + \mathbb{Z}^2\,.$$

Osoita, että dynaamisen systeemin $\overline{S}\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ jaksolliset pisteet ovat tiheässä ja että se riippuu herkästi alkuarvoista, mutta systeemi ei ole kaoottinen.

Todistus. Jaksollisten pisteiden tiheys todistetaan kuten tehtävässä 3. Olkoon $x + \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}^2)$. Pisteelle $x + (0, \frac{1}{2k}) + \mathbb{Z}^2$ pätee

$$S^k(x + (0, \frac{1}{2k}) + \mathbb{Z}^2) = (x_1 + kx_2 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2k})\,,$$

joten $d(\overline{S}^k(x + \mathbb{Z}^2), \overline{S}(x + (0, \frac{1}{2k}) + \mathbb{Z}^2) \approx \frac{1}{2}$. Siis systeemi riippuu herkästi alkuarvoista. Pisteen $x + \mathbb{Z}^2$ rata sisältyy ympyrään $\{y + \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 : y_2 = x_2 + \mathbb{Z}\}$, joten se ei ole tiheä. □

---

[1] Lavenna koordinaattien nimittäjät samoiksi. Luennolla osoitettiin, että F on bijektio.