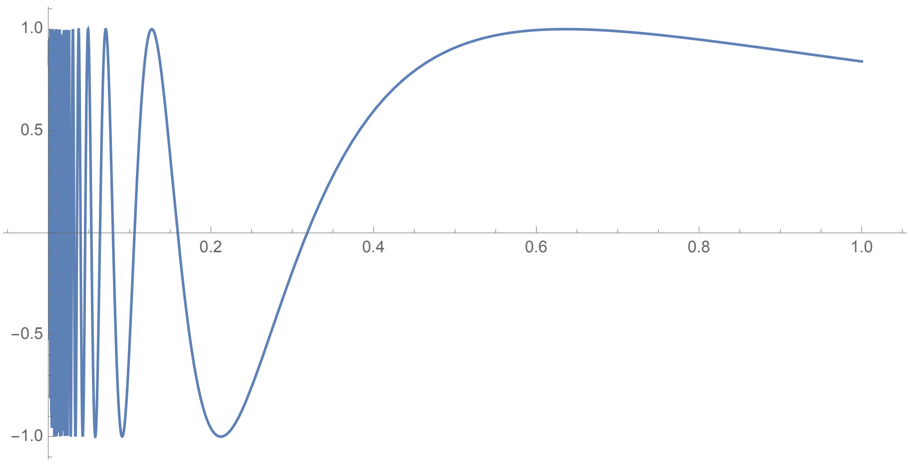
Metriset avaruudet ja Topologia



Jouni Parkkonen

2020

Sisältö

Lukijalle

Tämä teksti on kurssimateriaali metristen avaruuksien (Osa I) ja topologian (Osa II) kursseille. Se pohjautuu kursseihini vuosina 2017 ja 2018. Olen korjannut (paino)virheitä ja täydentänyt materiaalia Ari Lehtosen kommenttien perusteella, suuret kiitokset!

Metristen avaruuksien kurssi on nimensä mukaisesti johdatus metristen avaruuksien teoriaan. Määrittelemme metriikan eli etäisyysfunktion käsitteen, joka yleistää tavallisen euklidisen etäisyyden mihin tahansa epätyhjään joukkoon. Peruskäsitteiden (metriikka, jatkuvuus jne.) jälkeen tutustumme täydellisiin, kompakteihin ja yhtenäisiin metrisiin avaruuksiin.

Topologian kurssilla tarkastelemme samoja kysymyksiä kuin Osassa I mutta nyt tarkasteltavassa avaruudessa ei välttämättä ole määritelty etäisyysfunktiota. Sen sijaan tarkasteltavissa avaruuksissa on avoimien joukkojen kokoelma, jota kutsutaan topologiaksi. Topologian kurssilla todistetaan joitakin edistyneempiä metristen avaruuksien tuloksia kuten Bairen lause ja Arzelàn ja Ascolin lause. Topologian kurssin huipentumana tarkastelemme yleisten tuloavaruuksien topologiaa ja todistamme Tihonovin lauseen, jonka mukaan kompaktien avaruuksien tulo on kompakti.

Hyviä lähteitä itseopiskeluun ovat esimerkiksi [Väi1], [Pit] [SV], [Väi2], [Bou1], [Bou2].

Kansikuva: Topologin sinikäyrä on yhtenäinen mutta ei polkuyhtenäinen.

Merkintöjä

Tässä listassa esitellään merkintöjä joilekin käsitteille, jotka saattavat olla tuttuja aiemmilta kursseilta. Jotkut merkinnöistä (esimerkiksi joukkojen erotus) tai valinnoista (onko 0 luonnollinen luku?) poikkeavat eri kursseilla.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioiden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.
- $A \sqcup B$ on joukkojen A ja B *erillinen yhdiste*. Merkintä tarkoittaa joukkoa $A \cup B$ lisätiedolla, että $A \cap B = \emptyset$.
- $f|_A$ kuvauksen $f \colon X \to Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.
- $\mathscr{F}(X, Y) = \{f \colon X \to Y\}$ kaikkien kuvausten $f \colon X \to Y$ joukko.
- $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ rajoitettujen funktioiden $f \colon X \to \mathbb{R}$ avaruus.
- $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ jatkuvien funktioiden $f \colon X \to \mathbb{R}$ avaruus.
- $\mathrm{C}^0(X, Y)$ jatkuvien kuvausten $f \colon X \to Y$ avaruus, kun X ja Y ovat metrisiä tai topologisia avaruuksia.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.
- $A \subsetneq B$ joukko A on joukon B aito osajoukko: $A \subset B$ ja $A \neq B$.
- $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{jos } m = n \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$.

Osa I

Metriset avaruudet

Luku 1

Metriset avaruudet

1.1 Määritelmä ja esimerkkejä

Metriikka eli etäisyysfunktio on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ määräämällä avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$\mathbf{d}_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

on.

Määritelmä 1.1. — Olkoon $X \neq \emptyset$.[1] Kuvaus $d\colon X\times X \to [0,\infty[$ on *etäisyysfunktio* eli *metriikka* joukossa X, jos sillä on seuraavat ominaisuudet

(1) $d(x,y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ kaikille $x,y \in X$ (symmetrisyys), ja

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ kaikille $x,y,z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X,d) on *metrinen avaruus*.

Harjoituksissa osoitetaan, että metrisessä avaruudessa (X,d) pätee *käänteinen kolmioepäyhtälö*: kaikille $x,y,z \in X$ pätee

$$\Big|d(x,z) - d(z,y)\Big| \leq d(x,y)\,.$$

Esimerkki 1.2. — Euklidinen metrinen avaruus

$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbf{d}_2)\,.$$

Metriikan $\mathbf{d}_2$ positiivisuus ja symmetrisyys ovat selviä määrittelevän lausekkeen perusteella. Kolmioepäyhtälö lienee todistettu aiemmilla kursseilla ja seuraa myöhemmin osoitettavasta Propositiosta 1.7.

[1] Väisälä sallii tässä myös tyhjän joukon ja mikäpä siinä.

ESIMERKKI 1.3 (DISKREETTI METRIIKKA). — Olkoon X epätyhjä joukko. *Diskreetti metriikka* δ joukossa X määritellään asettamalla

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \neq b \\ 0, & \text{jos } a = b\,. \end{cases}$$

Pari (X,d) on *diskreetti metrinen avaruus*. Metriikan ominaisuudet (1) ja (2) ovat selviä. Tarkastellaan kolmioepäyhtälöä tapauksessa, jossa x, y ja z ovat kaikki eri pisteitä. Tällöin

$$\delta(x,y) = 1 \leq 2 = 1 + 1 = \delta(x,z) + \delta(z,y)\,.$$

ESIMERKKI 1.4 (RANSKAN RAUTATIEAVARUUS). — Lauseke[2]

$$d_{\text{SNCF}}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{, kun } x \text{ ja } y \text{ ovat lineaarisesti riippuvia} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$. Avaruutta $(\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$ kutsutaan *Ranskan rautatieavaruudeksi.* Tässä origo ajatellaan Pariisiksi ja kaikki radat ovat Pariisista maakuntiin johtavia säteitä. Jos kaupungit eivät ole samalla säteellä, niiden välillä voi matkustaa junalla vain Pariisin kautta.

Olkoon (X,d) metrinen avaruus. On helppo tarkastaa, että jos $A \subset X$, ei ole tyhjä joukko, niin $(A, d|_{A\times A})$ on metrinen avaruus.

MÄÄRITELMÄ 1.5. — Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Joukon A metriikka $d|_{A\times A}$ on metrisen avaruuden X *indusoima* metriikka joukossa A.

Käytämme indusoidulle metriikalle usein samaa merkintää kuin ympäroivän avaruuden X metriikalle.

ESIMERKKI 1.6 ($\mathbb{S}^n$). — Euklidisen avaruuden yksikköpallo on

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}\,.$$

Koska S^{n-1} on epätyhjä joukko, sille voidaan määritellä diskreetti metriikka. Koska S^{n-1} on ympäröivän euklidisen avaruuden epätyhjä osajoukko, sillä on euklidisen avaruuden indusoima metriikka, jossa kahden ympyrän pisteen etäisyys on niitä yhdistävän jänteen euklidinen pituus. Esimerkissä 1.3 käsitellyn metriikan rajoittuma joukkoon S^2 on diskreetti metriikka $2\,\delta$.

Neljäs metriikka, joka on usein luonnollisin, on *kulmametriikka*,

$$\measuredangle(x,y) = \arccos(x \,|\, y)\,,$$

missä $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$. Osoitetaan ympyrän tapauksessa, että tämä todella on metriikka. Ainoa seikka, joka vaatii tarkastuksen on kolmioepäyhtälö. Olkoot $A, B, C \in S^1$. Olkoot $a = \arccos(B \,|\, C)$, $b = \arccos(A \,|\, C)$ ja $c = \arccos(A \,|\, B)$. Olkoon $u \in S^1$, $u \perp C$. Nyt $A = C\cos b \pm u \sin b$ ja $B = C\cos a \pm u \sin a$, joten

$$\cos c = (A \,|\, B) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b \geq \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)\,.$$

[2]SNCF, Société nationale des chemins de fer français, on Ranskan valtion rautatieyhtiö.

Koska cos on vähenevä funktio välillä $[0, \pi]$, saadaan kolmioepäyhtälö. Korkeammassa ulottuvuudessa todistus on oleellisesti sama mutta tällöin pisteet A, B ja C eivät välttämättä ole samalla ympyrällä, joten vektori u pitää korvata kahdella vektorin $C \in \mathbb{E}^n$ ortogonaalikomplementin alkiolla. Käytämme yleensä kulmametriikkaa pallonpinnalla ja otamme käyttöön merkintäsopimuksen

$$\mathbb{S}^{n-1} = (S^{n-1}, \measuredangle) .$$

Esimerkki 1.7. — Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) tuloavaruudessa $X \times Y$ on erilaisia ”luonnollisia” metriikoita: Jokaiselle $p \geq 1$ määritellään metriikka

$$d_p\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = \sqrt[p]{d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p} .$$

Lisäksi maksimimetriikka

$$d_{\max}\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = \max\Big(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\Big)$$

on myös usein käyttökelpoinen. Harjoitustehtävissä 4.6 ja 4.7 tarkastellaan tapaukset d_1 ja $d_{\max}$. Muihin tapauksiin palataan ainakin funktionaalianalyysissa.

1.2 Normiavaruus

Määritelmä 1.8. — Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Funktio $\|\cdot\| \colon V \to [0, \infty[$ on *normi*, jos

(1) $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = 0$.

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in V$.

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikille $x, y \in V$.

On helppo tarkastaa, että normille pätee myös *käänteinen kolmioepäyhtälö*: kaikille $x, y \in V$ pätee

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\| .$$

Tämän epäyhtälön voi todistaa kuten metriikan vastaavan tuloksen ja toisaalta se seuraa metriikan vastaavasta tuloksesta, koska normi määrittelee metriikan luonnollisella tavalla:

Propositio 1.9. — *Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Lauseke*

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

määrittelee metriikan avaruudessa X. Metriikka d toteuttaa

$$d(x + v, y + v) = d(x, y)$$

kaikille $x, y, v \in V$.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa suoraan normin määritelmästä. Toinen väite saadaan laskulla

$$d(x+v,y+v) = \|x+v-(y+v)\| = \|x-y\| = d(x,y)\,. \quad \square$$

MÄÄRITELMÄ 1.10. — Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Kuvaus $(\cdot\,|\,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{R}$ on *sisätulo*, jos

(1) $(v\,|\,v)\geq 0$ kaikille $v\in V$ ja $(v\,|\,v)=0$, jos ja vain jos $v=0$,

(2) kuvaus $v\mapsto (v\,|\,v_0)$ on lineaarikuvaus kaikille $v_0\in V$,

(3) $(v\,|\,w)=(w\,|\,v)$ kaikille $v,w\in V$.

Pari $(V,(\cdot\,|\,\cdot))$ on *sisätuloavaruus.*

PROPOSITIO 1.11. — *Olkoon $(V,(\cdot\,|\,\cdot))$ sisätuloavaruus. Sisätulo määrää normin asettamalla*

$$\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}\,.$$

Todistus. Positiivisuus on selvä. Lisäksi kaikille $\lambda\in\mathbb{R}$ pätee

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x\,|\,\lambda x) = \lambda^2(x\,|\,x) = \lambda^2\,\|x\|^2\,.$$

Kolmioepäyhtälö seuraa lineaarialgebrassa todistettavasta Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöstä: Kaikille $x,y\in V$ pätee [3]

$$|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\|y\|\,.$$

Tämän epäyhtälön avulla saamme

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y\,|\,x+y) &= \|x\|^2 + 2(x\,|\,y) + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2\,.\end{aligned} \quad \square$$

ESIMERKKI 1.12. — Euklidinen normi

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x\,|\,x)} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

on normi Proposition 1.7 nojalla.

Muita tärkeitä normeja avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ovat

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$$

[3] Jos $x,y\in V-\{0\}$ ja $\lambda\in\mathbb{R}$, niin

$$0\leq (x+\lambda y\,|\,x+\lambda y) = (x\,|\,x)+\lambda(x\,|\,y)+\lambda(y\,|\,x)+\lambda^2(y\,|\,y) = (x\,|\,x)+2\lambda(x\,|\,y)+\lambda^2(y\,|\,y)\,.$$

Valitsemalla $\lambda = -\frac{(x\,|\,y)}{(y\,|\,y)}$ saadaan $0\leq (x\,|\,x) - 2\frac{(x\,|\,y)}{(y\,|\,y)}(x\,|\,y) + \frac{(x\,|\,y)^2}{(y\,|\,y)^2}(y\,|\,y) = (x\,|\,x) - \frac{(x\,|\,y)^2}{(y\,|\,y)}$, mistä siistimällä saadaan haluttu epäyhtälö. Jos $(x\,|\,y) = \pm\|x\|\|y\|$, niin $\big(\frac{x}{\|x\|}\mp\frac{y}{\|y\|}\,\big|\,\frac{x}{\|x\|}\mp\frac{y}{\|y\|}\big) = 0$, joten $y = \pm\frac{\|y\|}{\|x\|}x$.

ja yleisemmin

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$$

kun $1 \leq p < \infty$. Normin ominaisuudet (1) ja (2) ovat selviä mutta kolmioepäyhtälöä varten tarvitaan hieman työtä. Tapauksen $1 < p < \infty$ todistus esitetään funktionaalianalyysin kurssilla.

Määritelmä 1.13. — Olkoon $\mathbf{d}_p$ normin $\|\cdot\|_p$ määräämä metriikka vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$, kun $1 \leq p \leq \infty$.

Erityisesti siis $\mathbf{d}_2$ on tavanomainen euklidinen metriikka. Huomaa, että avaruudessa $\mathbb{R}$ pätee $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_p$ kaikilla $1 \leq p \leq \infty$.

Esimerkki 1.14. — Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon

$$\mathrm{raj}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

joukossa X määriteltyjen rajoitettujen $\mathbb{R}$-arvoisten funktioiden joukko. Avaruuden $\mathbb{E}^1$ kolmioepäyhtälön nojalla $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ on kaikkien funktioiden vektoriavaruuden $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus, joten se on vektoriavaruus. Harjoitustehtävässä 1.11 osoitamme, että funktio $\|\cdot\|_\infty : \mathrm{raj}(X, \mathbb{R}) \to [0, \infty[$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{1.1}$$

on normi.

Erikoistapaus rajoitettujen funktioiden avaruudesta on rajoitettujen reaalilukujonojen avaruus

$$\ell^\infty = \{\omega \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)| < \infty\}.$$

Lauseke

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)|$$

on normi vektoriavaruudessa ℓ^∞.

Esimerkki 1.15. — Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Analyysin kursseilla on osoitettu, että kaikki jatkuvat funktiot $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ ovat rajoitettuja. Koska jatkuvien funktioiden summat ja reaaliluvulla kerrotut jatkuvat funktiot ovat jatkuvia, $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ on avaruuden $\mathrm{raj}(I, \mathbb{R})$ aliavaruus. Siksi jatkuvien funktioiden vektoriavaruus $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ varustetaan usein normilla $\|\cdot\|_\infty$. Palaamme tähän esimerkkiin luvussa 6.1.

Propositio 1.16. — *Jono* $f_k \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ *suppenee tasaisesti kohti funktiota* $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$, *jos ja vain jos* $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, *kun* $k \to \infty$.

Todistus. Harjoitustehtävä 1.13. □

1.3 Isometria

Määritelmä 1.17. — Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on *isometrinen upotus*, jos kaikille $x, y \in X_1$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) = d_1(x, y).$$

Jos isometrinen upotus on bijektio, niin se on *isometria.* Jos on isometria $F\colon (X_1,d_1)\to (X_2,d_2)$, niin metriset avaruudet (X_1,d_1) ja (X_2,d_2) ovat *isometriset.*

Lemma 1.18. — *Isometrinen upotus on injektio.*

Todistus. Kahden eri pisteen etäisyys ei ole 0. Jos ne kuvautuvat samaksi pisteeksi, niin kuvapisteiden etäisyys on 0, joten kuvaus ei ole isometria. □

Lemma 1.19. — *Jos $F\colon (X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ ja $G\colon (X_2,d_2)\to(X_3,d_3)$ ovat isometrisia upotuksia, niin $G\circ F$ on isometrinen upotus. Isometrioiden yhdistetty kuvaus on isometria. Isometrian käänteiskuvaus on isometria.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.16 □

Esimerkki 1.20. — Olkoon $b\in\mathbb{R}^n$.

(1) Kuvaus $t_b\colon \mathbb{E}^n\to\mathbb{E}^n$, $t_b(x)=x+b$ on isometria.

(2) Olkoon $k\le n$ ja olkoon 0 avaruuden $\mathbb{R}^{n-k}$ nolla. Kuvaus $u\colon \mathbb{E}^k\to\mathbb{E}^n$, $u(y)=b+(y,0)$ on isometrinen upotus.

Esimerkki 1.21. — Muistamme lineaarialgebrasta, että $n\times n$-matriisi A on *ortogonaalinen*, jos sen sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaalin kannan. Ortogonaalinen $n\times n$-matriisi A toteuttaa yhtälön

$$(Ax\,|\,Ay)=(x\,|\,y)$$

kaikilla $x,y\in\mathbb{R}^n$. Se määrää isometrian $x\mapsto A\,x$ metrisissä avaruuksissa $\mathbb{E}^n$ ja $\mathbb{S}^{n-1}$. Jos nimittäin $x,y\in\mathbb{E}^n$, niin käyttämällä lineaarisuutta, normin määritelmää ja matriisin A ortogonaalisuutta saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_2(Ax,Ay)^2 &= \|Ax-Ay\|_2^2=\|A(x-y)\|^2=(A(x-y)\,|\,A(x-y))\\ &=(x-y\,|\,x-y)=\|x-y\|^2=\mathbf{d}_2(x,y)^2\,.\end{aligned}$$

Koska metriikka ei saa negatiivisia arvoja, väite seuraa tästä. Jos taas $x,y\in\mathbb{S}^{n-1}$, niin

$$\measuredangle(Ax,Ay)=\arccos(Ax\,|\,Ay)=\arccos(x\,|\,y)=\measuredangle(x,y)\,.$$

Esimerkki 1.22. — Olkoon $\exp\colon\mathbb{E}^1\to\mathbb{S}^1$ kuvaus

$$\exp(s)=(\cos s,\sin s)\,.$$

Selvästi exp on surjektio. Lisäksi kaikille $s,t\in\mathbb{E}^1$, joille $|s-t|\le\pi$ pätee

$$\begin{aligned}\measuredangle(\exp(s),\exp(t)) &= \arccos\Big((\cos s,\sin s)\,|\,(\cos t,\sin t)\Big)\\ &=\arccos(\cos s\cos t+\sin s\sin t)\\ &=\arccos\cos(s-t)=\arccos(|s-t|)=|s-t|\,.\end{aligned}$$

Siis kuvauksen exp rajoittuma jokaiselle välille, jonka pituus on korkeintaan π, on isometria. Jos taas $\pi<|s-t|<2\pi$, niin $\arccos\cos(|s-t|)=2\pi-|s-t|$, joten pidemmillä väleillä kuvaus ei ole isometria. Kuvauksia, jotka ovat isometrioita jokaisen pisteen lähelle rajoitettuna, sanotaan *lokaaleiksi isometrioiksi.* Palaamme täsmälliseen määritelmään luvussa 2.

Harjoitustehtäviä

1.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että kaikille $x, y, z \in X$ pätee

$$\Big| d(x,z) - d(z,y) \Big| \le d(x,y)\,.$$

1.2. Osoita, että lauseke

$$d_{\mathrm{SNCF}}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{, kun } x \text{ ja } y \text{ ovat lineaarisesti riippuvia ja} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$.

1.3. Osoita, että lauseke

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, kun } x = y \text{ ja} \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten} \end{cases}$$

määrää metriikan joukossa $\mathbb{R}^2$.

1.4. Osoita, että lauseke

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

määrittelee metriikan joukossa $\mathbb{R} - \{0\}$.

1.5. Olkoon E epätyhjä äärellinen joukko. Joukon E *potenssijoukko* on sen osajoukkojen muodostama joukko

$$\mathscr{P}(E) = \{A \subset E\}.$$

Joukkojen *symmetrinen erotus* määritellään asettamalla

$$A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

Osoita, että

$$d(A,B) = \#(A \bigtriangleup B)$$

on metriikka potenssijoukossa.[4] Osoita, että $\#(A - B)$ ei ole metriikka potenssijoukossa.

1.6. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon

$$K_n = \Big\{ f \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\} \Big\}$$

Osoita, että

$$d(f,g) = \#\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : f(k) \ne g(k)\}\,.$$

on metriikka joukossa K_n.[5]

1.7. Olkoon d metriikka avaruudella X, ja olkoon $\alpha \in]0, 1]$. Osoita, että lauseke

$$d^\alpha(x,y) = d(x,y)^\alpha$$

on myös metriikka. [6]

[4] Piirrä kolmen joukon leikkauksia kuvaava Venn-diagrammi. Osoita, että $(A \bigtriangleup C) \bigtriangleup (C \bigtriangleup B) = A \bigtriangleup B$.
[5] Tämä liittyy itse asiassa tehtävään 1.5 läheisesti.
[6] Kannattaa ensin todistaa, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b pätee $a^\alpha + b^\alpha \ge (a+b)^\alpha$.

1.8. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta (X, d) ja luvusta $\alpha > 1$, jolle tehtävän 1.7 tapaan määritelty funktio d^α ei ole metriikka.

1.9. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\|$$

on normi avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

1.10. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

on normi avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

1.11. Olkoon $X \neq \emptyset$. Osoita, että lauseke

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

on normi avaruudessa $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$.

1.12. Osoita, että lausekkeet

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

määräävät kumpikin normin vektoriavaruudessa $\mathrm{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. [7]

1.13. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Osoita, että jono $f_k \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$, jos ja vain jos $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, kun $k \to \infty$.[8]

1.14. Olkoon U vektoriavaruus ja olkoon $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruus. Olkoon $L\colon U \to W$ lineaarinen isomorfismi.[9] Osoita, että lauseke

$$\|u\| = \|Lu\|_W$$

antaa normin avaruudessa U.

1.15. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $Y \neq \emptyset$. Olkoon $b\colon Y \to X$ bijektio. Osoita, että lauseke

$$d_b(y_1, y_2) = d(b(y_1), b(y_2))$$

antaa metriikan joukossa Y. Mitä voit sanoa kuvauksesta $b\colon (Y, d_b) \to (X, d)$?

1.16. Olkoot (X_1, d_1), (X_2, d_2) ja (X_3, d_3) metrisiä avaruuksia ja olkoot $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ ja $G\colon (X_2, d_2) \to (X_3, d_3)$ isometrisia upotuksia. Osoita, että $G \circ F$ on isometrinen upotus. Osoita, että F^{-1} ja $G \circ F$ ovat isometrioita, jos F ja G ovat isometrioita.

1.17. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, jossa on täsmälleen kolme pistettä. Osoita, että on isometrinen upotus $j\colon X \to \mathbb{E}^2$.

[7] Käytä analyysin kursseilta tuttuja asioita ja tehtävän 1.11 tulosta.

[8] Palauta mieleen kurssin JMA4 asioita.

[9] bijektio

1.18. Esimerkissä 1.3 tarkasteltu metriikka d_{SNCF} voidaan määritellä samalla lausekkeella mihin tahansa avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kun $n \geq 1$. Osoita, että avaruudet $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{SNCF}})$ ovat isometrisia, kun $n \geq 2$. [10]

1.19. Olkoon

$$Y = \Big\{0, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\Big\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Osoita, että ei ole isometristä upotusta $j\colon (Y, \mathbf{d}_1) \to \mathbb{E}^n$ millään n. [11]

1.20. Määritä etäisyydet $\mathbf{d}_\infty\Big(0, (\tfrac{1}{2}, t)\Big)$ ja $\mathbf{d}_\infty\Big((1,0), (\tfrac{1}{2}, t)\Big)$ kaikille $t \in \mathbb{R}$. Keksi muutamia isometrisia upotuksia $j\colon ([0,1], \mathbf{d}_2) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{d}_\infty)$, joille pätee $j(0) = 0$ ja $j(1) = (1,0)$.

[10] Tässä tehtävässä voit käyttää ilman perusteluja tietoa, että joukkojen S^k ja S^n välillä on bijektio, kun $k, n \geq 1$.

[11] Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö auttaa.

Luku 2

Pallot, avoimet joukot ja suljetut joukot.

2.1 Pallot

Määritelmä 2.1. — Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r > 0$. Joukko

$$B(x_0, r) = B_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

on *r-säteinen avoin pallo* ja

$$\overline{B}(x_0, r) = \overline{B}_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

on *r-säteinen suljettu pallo*. Avoimia palloja $B(x_0, r)$, $r > 0$, sanotaan pisteen $x_0 \in X$ *palloympäristöiksi*.

Esimerkki 2.2. — Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksikköpalloa eri metriikoissa:

$$B_{\mathbf{d}_2}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} = B_{d_{\mathrm{SNCF}}}(0, 1)\,.$$

Diskreetin metriikan tilanne on mielenkiintoinen: avoimille palloille pätee

$$B_\delta(0, 1) = \{0\} = B_\delta(0, r)$$

kaikilla $0 < r \leq 1$ ja

$$B_\delta(0, r) = \mathbb{R}^2$$

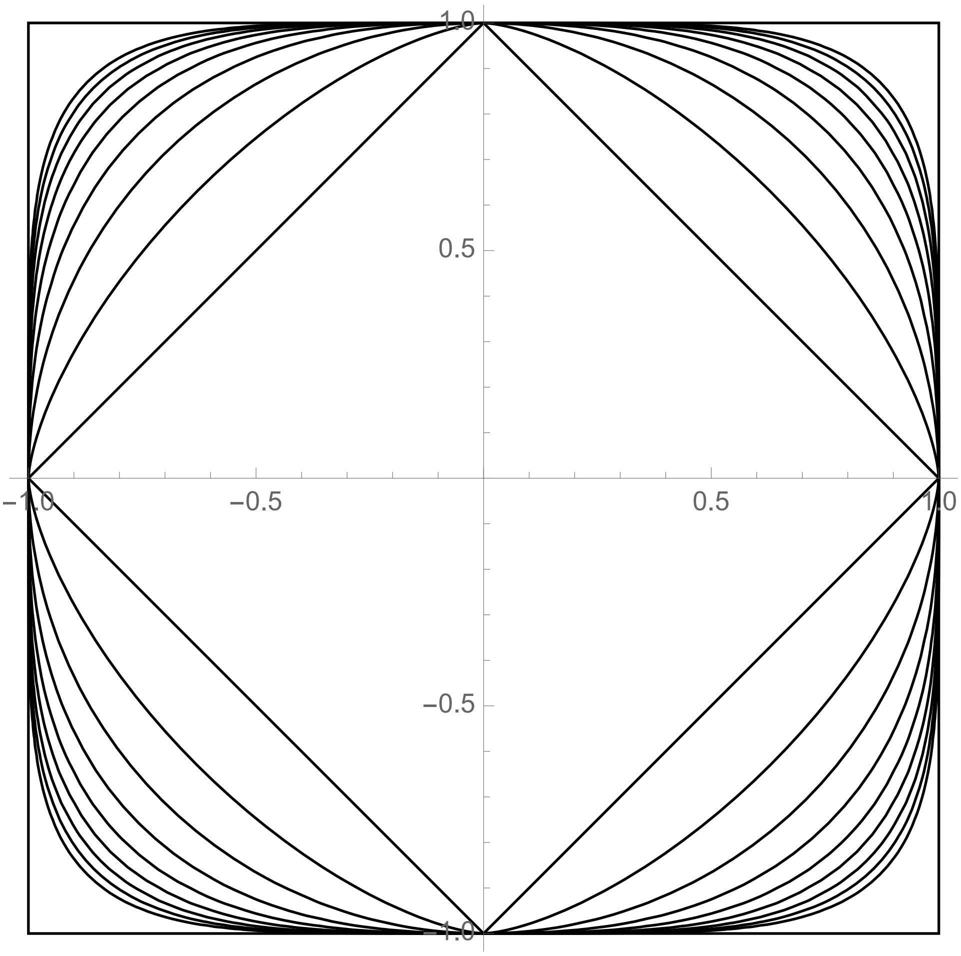
kaikilla $r > 1$. Vastaavasti suljetuille palloille pätee

$$\overline{B}_\delta(0, 1) = \mathbb{R}^2 = B_\delta(0, r)$$

kaikilla ≥ 1 ja

$$\overline{B}_\delta(0, r) = \{0\}$$

kaikilla $r < 1$.



Kuva 21: Yksikköympyröitä eri normeilla, kun $p \geq 1$.

Pallo ei välttämättä ole pyöreä:

$$B_{\mathbf{d}_\infty}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1 \text{ ja } |x_2| < 1\} =]-1,1[^2$$

ja

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{d}_1}(0,1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 1 \text{ ja } x_1 - x_2 < 1 \text{ ja } -x_1 + x_2 < 1 \text{ ja } -x_1 - x_2 < 1\}\,. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.3. — Olkoon $0 \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ vakiofunktio $0(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$. Nyt

$$B(0,1) = \Big\{f \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}) : |f(x)| < 1 \text{ kaikilla } x \in [0,1]\Big\}\,.$$

Määritelmä 2.4. — Metrinen avaruus X on *rajoitettu*, jos on $x \in X$ ja $r > 0$, joille $X \subset B(x,r)$. Olkoon lisäksi Y metrinen avaruus ja olkoon $f\colon X \to Y$. Kuvaus f on *rajoitettu*, jos $F(X)$ on avaruuden Y rajoitettu joukko.

Esimerkki 2.5. — (1) Kaikki diskreetit metriset avaruudet (X,δ) ovat rajoitettuja koska $X = \overline{B}_\delta(x,1)$ kaikilla $x \in X$.
(2) Pallon pinta $\mathbb{S}^n$ on rajoitettu, koska $\mathbb{S}^n = \overline{B}(x,\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{S}^n$.

2.2 Avoimet ja suljetut joukot

MÄÄRITELMÄ 2.6. — Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Piste $a \in A$ on joukon A *sisäpiste*, jos on $r_a > 0$, jolle $B(a, r_a) \subset A$. Metrisen avaruuden X osajoukko on *avoin*, jos sen kaikki pisteet ovat sisäpisteitä ja *suljettu*, jos sen komplementti on avoin. Jos $U \subset X$ on avoin ja $x \in U$, niin U on pisteen x *ympäristö*.[1]

ESIMERKKI 2.7. — (1) Metrinen avaruus X ja tyhjä joukko $\emptyset$ ovat avoimia ja suljettuja joukkoja metrisessä avaruudessa X.

(2) Diskreetin metrisen avaruuden jokainen piste on avoin ja suljettu. Itse asiassa kaikki diskreetin metrisen avaruuden osajoukot ovat avoimia: Jos E on diskreetin metrisen avaruuden epätyhjä osajoukko ja $e \in E$, niin $B(e, 1) = \{e\} \subset E$, joten e on joukon E sisäpiste.

(3) Joukko $J = [0, 1[\subset \mathbb{E}^1$ ei ole avoin eikä suljettu: 0 ei ole joukon J sisäpiste, koska $-\frac{r}{2} \in B(0, r) \cap (\mathbb{E}^1 - J)$ kaikilla $r > 0$. Samaan tapaan nähdään, että 1 ei ole joukon $\mathbb{E}^1 - J$ sisäpiste. (4) Varustetaan kohdan (3) joukko J avaruuden $\mathbb{E}^1$ indusoimalla metriikalla. Tällöin J on kohdan (1) nojalla avoin ja suljettu joukko avaruudessa $(J, \mathbf{d}_1)$.

PROPOSITIO 2.8. — *Olkoon X metrinen avaruus. Tällöin*

(1) avoin pallo $B(x, r)$ on avoin joukko kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $r > 0$.

(2) suljettu pallo $\overline{B}(x, r)$ on suljettu joukko kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $r > 0$.

Todistus. (1) Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r_0 > 0$. Olkoon $x \in B(x_0, r_0)$. Asetetaan $r_x = r_0 - d(x_0, x)$. Jos $y \in B(x, r_x)$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r_0 - d(x_0, x) + d(x, x_0) = r_0\,,$$

joten $y \in B(x_0, r_0)$.

Väite (2) tehdään harjoituksissa. □

PROPOSITIO 2.9. — *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoot A ja B indeksijoukkoja. Olkoot $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$ avoimia osajoukkoja ja olkoot $F_\beta \subset X$, $\beta \in B$ suljettuja osajoukkoja. Tällöin*

(1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

(2) $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

(3) jos A on äärellinen, niin $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

(4) jos B on äärellinen, niin $\bigcup_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

Todistus. (1) Olkoon $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tällöin $x \in U_\alpha$ jollain $\alpha \in A$. Koska U_α on avoin, on $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Siis $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ on avoin.

Väitteet (2)–(4) todistetaan harjoituksissa. □

PROPOSITIO 2.10. — *Metrisen avaruuden X osajoukko on avoin, jos ja vain jos se on tyhjä tai se voidaan esittää avoimien pallojen yhdisteenä.*

[1]Joskus halutaan käyttää yleisempää käsitettä ja määritellään, että joukko N on pisteen $x \in X$ ympäristö, jos on avoin joukko $U \subset N$, jolle pätee $x \in U \subset X$.

Todistus. Jos $E \subset X$ on avoin, niin jokaisella $e \in E$ on palloympäristo $B(e, r_e) \subset E$. Saadaan siis

$$E = \bigcup_{e \in E} \{e\} \subset \bigcup_{e \in E} B(e, r_e) \subset E\,,$$

joten ketjun keskellä olevan inkluusion on oltava yhtäsuuruus. Siis

$$E = \bigcup_{e \in E} \{B(e, r_e)\}\,.$$

Väitteen toinen suunta seuraa Propositiosta 2.6. □

Seuraava havainto metrisen avaruuden osajoukon indusoidusta metriikasta on joskus hyödyllinen.

PROPOSITIO 2.11. — *Olkoon (X, d_X) metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$ epätyhjä osajoukko. Joukko $U_E \subset E$ on avoin metrisessä avaruudessa (E, d_X), jos ja vain jos on avoin joukko U metrisessä avaruudessa (X, d_X), jolle $U_E = U \cap E$.*

Todistus. Todistuksen selventämiseksi käytämme merkintöjä

$$B_E(e, r) = \{x \in E : d_X(x, e) < r\}$$

ja

$$B_X(e, r) = \{x \in X : d_X(x, e) < r\}.$$

Olkoon $U_E \subset E$ avoin. Jokaisella $e \in U_E$ on siis $r_e > 0$, jolle $B_E(e, r_e) \subset U_E$. Metrisen avaruuden X osajoukko $U = \bigcup_{e \in E} B_X(e, r_e)$ on avoin ja sille pätee $U \cap E = E_E$.

Jos taas U on avoin avaruudessa (X, d_X), niin jokaiselle $e \in E \cap U$ on $r_e > 0$, jolle $B_X(e, r_e) \subset U$. Koska $B_E(e, r_e) = B_X(r, e) \cap E$, saadaan $B_E(e, r_e) \subset U \cap E$ jokaisella $e \in U \cap E$, joten $U \cap E$ on avoin avaruudessa (E, d_X). □

2.3 Sisus, reuna ja sulkeuma

MÄÄRITELMÄ 2.12. — Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $A \subset X$. Joukon A komplementin sisäpiste on joukon A *ulkopiste*. Jos $x \in X$ ei ole joukon A ulkopiste eikä sisäpiste, niin se on joukon A *reunapiste*. Joukon A

- sisäpisteiden joukko $\operatorname{int} A$ on joukon A *sisus*.
- ulkopisteiden joukkoa merkitään $\operatorname{ext} A$.
- reunapisteiden joukko on ∂A.

PROPOSITIO 2.13. — *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Joukon A sisus ja ulkopisteiden joukko ovat avoimia ja sen reuna on suljettu. Lisäksi pätee*

$$X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A\,. \tag{2.1}$$

Todistus. Määritelmien nojalla $\operatorname{int} A$ ja $\operatorname{ext} A$ ovat erillisiä ja reuna määritellään niiden komplementtina, joten (2.1) pätee selvästi. Koska $\operatorname{ext} A$ on joukon A komplementin sisäpisteiden joukko, riittää osoittaa, että $\operatorname{int} A$ on avoin mille tahansa joukolle A, sillä avointen joukkojen $\operatorname{int} A$ ja $\operatorname{ext} A$ komplementtina ∂A on suljettu.

Olkoon $a \in \operatorname{int} A$. Tällöin on $r_a > 0$, jolle $B(a, r_a) \subset A$. Osoitetaan, että itse asiassa $B(a, r_a) \subset \operatorname{int} A$: Olkoon $b \in B(a, r_a)$. Kuten Proposition 2.5 todistuksessa huomaamme, että $B(b, r_a - d(b, a)) \subset B(a, r_a) \subset A$, joten $b \in \operatorname{int} A$. □

Lemma 2.14. — *Olkoon X metrinen avaruus. Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ reunapiste, jos ja vain jos jokaisella $r > 0$ pätee $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(x, r) \cap (X - A) \neq \emptyset$.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. □

Määritelmä 2.15. — Olkoon X metrinen avaruus. Osajoukon $E \subset X$ *sulkeuma* on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon E:

$$\overline{E} = \bigcap_{\substack{F \supset E \\ F \text{ suljettu}}} F\,.$$

Propositio 2.16. — *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Tällöin*

(1) E on avoin, jos ja vain jos $E = \operatorname{int} E$.

(2) Joukko E on suljettu, jos ja vain jos $E = \overline{E}$.

(3) $\overline{E} = E \cup \partial E = \operatorname{int} E \cup \partial E$.

(4) $\partial(X - E) = \partial E$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Proposition 2.11 kohtien (2) ja (3) nojalla saadaan muun muassa seuraava havainto: Joukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää reunansa.

Esimerkki 2.17. — (1) Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$ avoimen pallon $B(x_0, r)$ ja suljetun pallon $\overline{B}(x_0, r)$ sisus on $B(x_0, r)$ ja molempien pallojen reuna on joukko

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x - x_0\| = r\}\,.$$

Jos $r > 0$, $x \in S(x_0, r)$ ja $0 < \varepsilon < r$, niin

$$x + \frac{\varepsilon}{2r}(x_0 - x) \in B(x_0, r) \cap B(x, \varepsilon)$$

ja

$$x - \frac{\varepsilon}{2r}(x_0 - x) \in (\mathbb{E}^n - B(x_0, r)) \cap B(x, \varepsilon)\,.$$

Siis $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(2) Diskreetissä metrisessä avaruudessa (X, δ) avoimet pallot ovat suljettuja. Siis

$$\overline{B_\delta(x, 1)} = B_\delta(x, 1) = \{x\} \neq X = \overline{B}_\delta(0, 1)\,,$$

kun $\#X \geq 2$.

MÄÄRITELMÄ 2.18. — Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ *kasautumispiste*, jos $(B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ jokaisella $r > 0$. Jos on $r > 0$ siten, että $B(x,r) \cap A = \{x\}$, niin x on joukon A *eristetty piste* tai *erakkopiste*. Joukko $E \subset X$ on *diskreetti*, jos kaikki pisteet $x \in E$ ovat erakkopisteitä.

Lemmassa 2.10 tehty havainto reunapisteen ominaisuuksista ja kasautumispisteen määritelmä muistuttavat toisiaan melko paljon. Siksi ei olekaan yllättävää, että suljetut joukot voidaan luonnehtia kasautumispisteiden avulla samaan tapaan kuin reunan avulla:

PROPOSITIO 2.19. — *Joukko E on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.*

Todistus. Olkoon $E \subset X$ suljettu. Olkoon $x \in X - E$. Koska $X - E$ on avoin, on $r > 0$, jolle $B(x,r) \subset X - E$. Siispä x ei ole joukon E kasautumispiste.

Oletetaan sitten, että E sisältää kaikki kasautumispisteensä. Olkoon $x \in X - E$. Tällöin x ei ole kasautumispiste, joten on $r > 0$, jolle $(B(x,r) - \{x\}) \cap E = \emptyset$. Siis $B(x,r) \subset X - E$, joten $X - E$ on avoin. Siis E on suljettu. □

ESIMERKKI 2.20. — Joukolle $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^1$ pätee

$$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset\,, \qquad \operatorname{ext} \mathbb{Q} = \emptyset\,, \qquad \partial \mathbb{Q} = \mathbb{E}^1\,, \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^1\,.$$

Jokainen $x \in \mathbb{E}^1$ on joukon $\mathbb{Q}$ kasautumispiste ja joukon $\mathbb{E}^1 - \mathbb{Q}$ kasautumispiste.

ESIMERKKI 2.21. — Olkoon (X, δ) diskreetti metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} A = A\,, \qquad \operatorname{ext} A = X - A\,, \qquad \partial A = \emptyset\,, \qquad \overline{A} = A\,.$$

Erityisesti joukolle $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, \delta)$ pätee

$$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\,, \qquad \operatorname{ext} \mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}\,, \qquad \partial \mathbb{Q} = \emptyset\,, \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\,.$$

MÄÄRITELMÄ 2.22. — Metrisen avaruuden X osajoukko E on *tiheä*, jos $\overline{E} = X$. Metrinen avaruus X on *separoituva*, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

ESIMERKKI 2.23. — (1) Rationaalilukujen joukko on siis tiheä tavallisella euklidisella etäisyydellä varustetussa reaalilukujen joukossa. Yleisemmin $\mathbb{E}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, joten $\mathbb{E}^n$ on separoituva.

(2) $\mathbb{S}^1 = \overline{\exp(\mathbb{Q})}$, joten $\mathbb{S}^1$ on separoituva.

(3) Ylinumeroituva diskreetti metrinen avaruus ei ole separoituva.

Palaamme separoituvuuteen luvussa 7.

2.4 Lokaalit ominaisuudet

Jos jokin ehto tai ominaisuus pätee metrisen avaruuden jokaisen pisteen jossain ympäristössä, sanotaan, että kyseinen ehto tai ominaisuus on *lokaali*. Tapasimme tällaisen käsitteen Esimerkissä 1.16 mutta lykkäsimme tarkan määritelmän esittämisen tähän lukuun.

Määritelmä 2.24. — Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on *lokaali(sti) isometrinen upotus*, jos jokaisella $x \in X_1$ on ympäristo U_x siten, että rajoittuma $F|_{U_x}\colon U_x \to X_2$ on isometrinen upotus.

Esimerkissä 1.16 osoitimme, että kuvaus $\exp\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\exp(t) = (\cos t, \sin t)$, on lokaali isometrinen upotus.

Harjoitustehtäviä

2.1. Kuvaile Ranskan rautatieavaruuden avoimet pallot $B(x, 1)$, kun $x \neq 0$.

2.2. Osoita, että metrisen avaruuden suljettu pallo on suljettu joukko ja että jokainen yhden pisteen muodostama joukko on suljettu joukko.

Määritelmä 2.25. — Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $C > 0$. Asetetaan

$$d_C(x, y) = \min(d(x, y), C)$$

kaikille $x, y \in X$.

2.3. Osoita, että lauseke $d_C(x, y)$ määrittelee metriikan joukossa X.

2.4. Osoita, että joukko $U \subset X$ on avoin metrisessä avaruudessa (X, d), jos ja vain jos se on avoin metrisessä avaruudessa (X, d_C).

2.5. Todista Proposition 2.6 kohta (3).

2.6. Todista Proposition 2.6 kohdat (2) ja (4).

2.7. Todista Proposition 2.11 kohdat (1) ja (2).

2.8. Todista Proposition 2.11 kohdat (3) ja (4).

2.9. Osoita, että joukko on avoin ja suljettu, jos ja vain jos sen reuna on tyhjä.

2.10. Osoita, että $\partial\partial A \subset \partial A$. Anna esimerkki, jolle pätee $\partial\partial A \neq \partial A$.

Määritelmä 2.26. — Olkoon $\varepsilon > 0$. Joukon $E \subset X$ *ε-paksunnos* on

$$E^\varepsilon = \bigcup_{e \in E} \overline{B}(e, \varepsilon)\,.$$

2.11. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Osoita, että

$$\overline{E} = \bigcap_{\varepsilon > 0} E^\varepsilon\,.$$

2.12. Osoita, että metrisen avaruuden jokainen suljettu joukko voidaan esittää numeroituvana leikkauksena avoimista joukoista. Osoita, että metrisen avaruuden jokainen avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä suljetuista joukoista.

MÄÄRITELMÄ 2.27. — Olkoon $X \neq \emptyset$. Funktio $d\colon X \times X \to [0,\infty[$ on *ultrametriikka*, jos sillä on metriikalta vaadittavat ominaisuudet (1) ja (2) ja se toteuttaa *ultrametrisen epäyhtälön*

$$d(x,y) \leq \max\Big(d(x,z), d(z,y)\Big)$$

kaikille $x,y,z \in X$. Pari (X,d) on *ultrametrinen avaruus.*

2.13. Osoita, että ultrametrinen avaruus (X,d) on metrinen avaruus.

2.14. Olkoon (X,d) on ultrametrinen avaruus. Osoita, että kaikille $y \in B(x,r)$ pätee $B(y,r) = B(x,r)$ ja että kaikille $y \in \overline{B}(x,r)$ pätee $\overline{B}(y,r) = \overline{B}(x,r)$.[2]

2.15. Osoita, että kaikki ultrametrisen avaruuden X pallot ovat avoimia ja suljettuja.[3]

MÄÄRITELMÄ 2.28. — Olkoon

$$\Sigma = \Big\{a = a_0a_1a_2\cdots : a_i \in \{0,1\} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\Big\}$$

ja määritellään metriikka d_Σ asettamalla $d_\Sigma(a,a) = 0$ kaikille $a \in \Sigma$ ja

$$d_\Sigma(a,a') = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|a_i - a'_i|}{2^i}$$

muuten. Pari (σ, d_Σ) on *kahden symbolin jonoavaruus.*

2.16. Jos $a, a \in \Sigma$, $a \neq a'$, asetetaan

$$m(a,a') = \min\Big\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq a'_k\Big\}\,.$$

Osoita, että

$$d_\Sigma(a,a') = 2^{-m(a,a')}\,,$$

jos $a \neq a'$. Osoita, että (Σ, d_Σ) on ultrametrinen avaruus.

2.17. Olkoon $0 = 00000\cdots \in \Sigma$. Kuvaile avaruuden Σ pallot $B(0,r)$ ja $\overline{B}(0,r)$ kaikille $r > 0$.

2.18. Osoita, että Σ on separoituva.

[2]Siis pallon jokainen piste on sen keskipiste!
[3]Käytä apuna Tehtävän 2.14 tuloksia.

Luku 3

Jatkuvuus

3.1 Jatkuvat kuvaukset

MÄÄRITELMÄ 3.1. — Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F: (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in X_1$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$ kaikilla $x \in X_1$, joille $d_1(x_0, x) < \delta$. Kuvaus on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa avaruden X_1 pisteessä.

Jatkuvuuden määritelmä voidaan muotoilla pallojen avulla hieman geometrisemman näköisessä muodossa:

LEMMA 3.2. — *Kuvaus $F: (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X_1$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että*

$$F\Big(B(x_0, \delta)\Big) \subset B(F(x_0), \varepsilon) . \quad \square$$

ESIMERKKI 3.3. — (1) Vakiokuvaus on aina jatkuva.
(2) Jos $A \subset \mathbb{E}^n$ ja $B \subset \mathbb{E}^k$ varustetaan euklidisen avaruuden indusoimilla metriikoilla, niin kuvauksen $f: A \to B$ jatkuvuuden määritelmä on sama kuin analyysin ja moniulotteisen differentiaalilaskennan kursseilla. Siis esimerkiksi kaikki (useammankin muuttujan) polynomifunktiot, trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktio ovat jatkuvia.
(3) Kaikki koordinaattiprojektiot $p_k: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$,

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k ,$$

ovat jatkuvia: Olkoot $x, y \in \mathbb{E}^n$ Tällöin

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geq |x_k - y_k| = |p_k(x) - p_k(y)| .$$

Jos $\|x - y\| < \varepsilon$, niin $|p_k(x) - p_k(y)| < \varepsilon$, joten p_k on jatkuva.
(4) Isometriset upotukset ovat jatkuvia kuvauksia.

Määritelmä 3.4. — Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia ja olkoon $K \geq 0$. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on *K-Lipschitz-jatkuva* tai *K-Lipschitz-kuvaus*, jos kaikille $x, y \in X_1$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) \leq K\, d_1(x, y)\,.$$

Jos F on K-Lipschitz-jatkuva jollain $K \geq 0$, niin F on *Lipschitz-jatkuva* kuvaus tai *Lipschitz-kuvaus.*

Esimerkki 3.5. — Euklidisen avaruuden koordinaattiprojektiot ovat 1-Lipschitz-kuvauksia.

Lemma 3.6. — *Lipschitz-jatkuvat kuvaukset ovat jatkuvia.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 3.7. — *Jos $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ ja $G\colon (X_2, d_2) \to (X_3, d_3)$ ovat jatkuvia kuvauksia, niin $G \circ F$ on jatkuva kuvaus.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 3.8. — *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus.*

(1) Kuvaus f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset Y$.

(2) Kuvaus f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

Todistus. Todistetaan väite (1). Toinen väite tehdään harjoituksissa.

Olkoon f jatkuva. Olkoon $x \in f^{-1}(U)$. Koska U on avoin, on $r > 0$ siten, että $B(f(x), r) \subset U$. Jatkuvuuden nojalla on $\delta > 0$, jolle $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), r)$. Siis $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), r)) \subset f^{-1}(U)$.

Oletetaan sitten, että jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Olkoon $x \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen mukaan joukon $B(f(x), \varepsilon)$ alkukuva on avoin. Koska $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, niin on $\delta > 0$, jolle $B(x, \delta) \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Siis f on jatkuva pisteessä x. □

Esimerkki 3.9. — Lause 3.6 antaa kätevän keinon osoittaa joitain euklidisen avaruuden osajoukkoja avoimiksi tai suljetuiksi.

(1) Kaikki esimerkissä 1.8 määritellyt normit $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ ovat jatkuvia kuvauksia $n_p = \|\cdot\|_p\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$. Siis normin $\|\cdot\|_p$ määräämän metriikan $\mathbf{d}_p$ avoimet pallot

$$B_{\mathbf{d}_p}(0, r) = n_p^{-1}\big(]{-\infty}, r[\big)$$

ovat euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ avoimia osajoukkoja.

(2) Olkoon $S\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^2$,

$$S(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t} & \text{, kun } t \neq 0 \\ 0 & \text{, kun } t = 0 \end{cases}\,,$$

ja olkoon $\widetilde{S}\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$, $\widetilde{S}(x) = x_2 - S(x_1)$. Analyysin ja differentiaalilaskennan tai vektorifunktioiden analyysin kursseilta muistamme, että S ja $\widetilde{S}$ ovat jatkuvia kuvauksia. Koordinaattiprojektio $p_2(x) = x_2$ on myös jatkuva. Joukko

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ ja } \ 0 < x_2 < S(x_1)\Big\} = \widetilde{S}^{-1}\Big(]-\infty, 0[\Big) \cap p_2^{-1}(]0, \infty[)$$

on siis avoin Lauseen 3.6 nojalla.

Esimerkki 3.10. — Olkoon (X, δ) diskreetti metrinen avaruus ja olkoon (Y, d) metrinen avaruus. Kaikki kuvaukset $f\colon X \to Y$ ovat jatkuvia. Tämä seuraa Lauseesta 3.6, koska kaikki diskreetin metrisen avaruuden osajoukot ovat avoimia.

Sen sijaan monista metrisistä avaruuksista on vain hyvin vähän jatkuvia kuvauksia $g\colon Y \to (X, \delta)$ diskreettiin metriseen avaruuteen, koska jokaisen yhden pisteen joukon $\{x\} \subset X$ alkukuva on avoin joukko. Jos siis $y \in g^{-1}(\{x\})$, niin on $r_y > 0$, siten, että $g(z) = x$ kaikille $z \in B(y, r_y)$. Erityisesti identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{E}^1 \to (\mathbb{R}, \delta)$ ei ole jatkuva kuvaus.

3.2 Jatkuvat kuvaukset normiavaruuteen

Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon V normiavaruus. Tällöin joukon $\mathscr{F}(X, V)$ alkioita voi laskea yhteen ja kertoa reaaliluvuilla[1]: Jos $f, g \in \mathscr{F}(X, V)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin määritellään kuvaukset $af + bg \in \mathscr{F}(X, V)$ asettamalla

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$$

kaikille $x \in X$. Jos $V = \mathbb{R}$, niin tarkasteltavien funktioiden arvot ovat reaalilukuja. Tällöin voidaan määritellä funktio $fg \in \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ asettamalla

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

kaikille $x \in X$. [2] Nämä operaatiot sopivat hyvin yhteen jatkuvuuden käsitteen kanssa:

Lemma 3.11. — *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon V normiavaruus. Jos $f, g \in \mathrm{C}^0(X, V)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin $af + bg \in \mathrm{C}^0(X, V)$. Jos $V = \mathbb{R}$ niin $fg \in \mathrm{C}^0(X, \mathbb{R})$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. Todistus on täsmälleen sama kuin tapauksessa, jossa $X \subset \mathbb{E}^1$, jota tarkastellaan ensimmäisen vuoden analyysin kursseilla. □

Yleistämme nyt Esimerkin 1.10:

Esimerkki 3.12. — Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}^0(X, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\},$$

missä

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

on avaruuden $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ normi. Lemman 3.9 nojalla $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{R})$ on normiavaruuden $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus ja $(\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

[1] Algebrallisesti ajatellen joukko $\mathscr{F}(X, V)$ varustettuna yhteenlaskulla ja reaailuvulla kertomisella on vektoriavaruus.

[2] Joukko $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ varustettuna yhteenlaskulla ja funktioiden kertolaskulla on $\mathbb{R}$-algebra: se on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja rengas.

Harjoitustehtäviä

3.1. Osoita, että Lipschitz-jatkuvat kuvaukset ovat jatkuvia.

3.2. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $p_X : (X \times Y, d_{\max}) \to (X, d_X)$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$p_X(x, y) = x$$

kaikille $(x, y) \in X \times Y$. Osoita, että p_X on jatkuva.

3.3. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että normi $\|\cdot\|$ on jatkuva funktio.[3]

3.4. Onko kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{E}^2 \to (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$ jatkuva? Entä sen käänteiskuvaus?

3.5. Onko kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$ jatkuva?

3.6. Olkoon V normiavaruus ja olkoon

$$S(0, 1) = \{x \in V : \|x\| = 1\}.$$

Olkoon $\mathrm{pr}_S\colon V - \{0\} \to S(0, 1)$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$\mathrm{pr}_S(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

kaikille $x \in V - \{0\}$. Osoita, että pr_S on jatkuva.

3.7. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus. Osoita, että f on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

3.8. Osoita, että jatkuvan funktion $f\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ kuvaaja

$$\mathscr{G}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{E}^2 : x \in \mathbb{E}^1\}$$

on suljettu joukko avaruudessa $\mathbb{E}^2$.

3.9. Olkoon Σ kuten tehtävässä 2.16. Kuvaus $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$, joka määritellään asettamalla

$$\sigma(a_0a_1a_2a_3\cdots) = a_1a_2a_3\cdots$$

kaikille $a_0a_1a_2a_3\cdots \in \Sigma$, on *vasen siirto*. Osoita, että σ on 2-Lipschitz-jatkuva.

MÄÄRITELMÄ 3.13. — Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Pisteen $x \in X$ *etäisyys joukosta* E on

$$d(x, E) = \inf\{d(x, e) : e \in E\}\,.$$

Etäisyys joukosta E määrittelee funktion $d_E\colon X \to \mathbb{E}^1$ asettamalla $d_E(x) = d(x, E)$ kaikille $x \in X$.

3.10. Osoita, että d_E on 1-Lipschitz-jatkuva kuvaus.

3.11. Osoita, että $d(x, E) = 0$, jos ja vain jos $x \in \overline{E}$.

[3]Osoita, että kuvaus $n\colon V \to \mathbb{E}^1$, $n(v) = \|v\|$, on jatkuva.

3.12. Osoita, että $d(x, E) = d(x, \overline{E})$ kaikille $x \in X$.

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$. Määritellään jokaiselle $a \in X$ kuvaus $\phi_a \colon X \to \mathbb{E}^1$ asettamalla

$$\phi_a(x) = d(x, x_0) - d(x, a)\,.$$

Määritellään kuvaus $K \colon X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ asettamalla

$$K(a) = \phi_a$$

kaikille $a \in X$.

3.13. Osoita, että ϕ_a on jatkuva kuvaus jokaisella $a \in X$.

3.14. Osoita, että kuvaus K on isometrinen upotus. [4]

[4] Avaruudessa $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ käytetään sup-normin määräämää metriikkaa kuten Esimerkissä 3.10.

Luku 4

Ekvivalentit metriikat ja homeomorfismit

4.1 Homeomorfismi

MÄÄRITELMÄ 4.1. — Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Bijektio $F\colon X_1 \to X_2$ on *homeomorfismi*, jos F on jatkuva ja F^{-1} on jatkuva.

ESIMERKKI 4.2. — (1) Isometria on homeomorfismi.
(2) Esimerkissä 3.8 tarkasteltu kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \delta) \to \mathbb{E}^1$ on jatkuva mutta se ei ole homeomorfismi.

LEMMA 4.3. — *Homeomorfismien yhdistetty kuvaus on homeomorfismi. Homeomorfismin käänteiskuvaus on homeomorfismi.*

Todistus. Bijektioiden yhdistetty kuvaus on bijektio ja jatkuvien kuvausten yhdistetty kuvaus on jatkuva Lemman 3.5 nojalla. Toinen väite sisältyy homeomorfismin määritelmään. □

PROPOSITIO 4.4. — *Homeomorfismi kuvaa avoimet joukot avoimiksi ja suljetut joukot suljetuiksi.*

Todistus. Seuraa Lauseesta 3.6, koska käänteiskuvaus on jatkuva. □

MÄÄRITELMÄ 4.5. — Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kokoelma

$$\tau(X, d) = \{U \subset X : U \text{ on avoin}\}$$

on metrisen avaruuden (X, d) *topologia*.

Metristen avaruuksien kurssia seuraavalla kurssilla, jonka nimi on topologia, topologia on peruskäsite. Topologinen avaruus on pari, joka koostuu epätyhjästä joukosta ja topologiasta, jolla on samoja ominaisuuksia kuin metrisen avaruuden avoimien joukkojen kokoelmalla.

MÄÄRITELMÄ 4.6. — Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X *metriikat* d *ja* $\widetilde{d}$ *ovat ekvivalentteja*, jos metristen avaruuksien (X, d) ja $(X, \widetilde{d})$ topologiat ovat samat.

PROPOSITIO 4.7. — *Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X metriikat d ja $\widetilde{d}$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos* $\mathrm{id}\colon (X, d) \to (X, \widetilde{d})$ *on homeomorfismi.*

Todistus. Seuraa suoraan Lauseesta 3.6 ja määritelmistä. □

PROPOSITIO 4.8. — *Olkoot d_X ja $\widetilde{d}_X$ ekvivalentteja metriikoita joukolla $X \neq \emptyset$ ja olkoot d_Y ja $\widetilde{d}_Y$ ekvivalentteja metriikoita joukolla $Y \neq \emptyset$. Kuvaus $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on jatkuva, jos ja vain jos kuvaus $f\colon (X, \widetilde{d}_X) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ on jatkuva.*

Todistus. Kutsutaan todistuksessa kuvausta $f\colon (X, \widetilde{d}_X) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ kuvaukseksi $\widetilde{f}$. Metriikoiden ekvivalenssioletuksen nojalla identtiset kuvaukset $\mathrm{id}_X\colon (X, d_X) \to (X, \widetilde{d}_X)$ ja $\mathrm{id}_Y\colon (Y, d_Y) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ ovat homeomorfismeja. Tarkasteltavat kuvaukset muodostavat kaavion

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Y} \\ X & \xrightarrow{\widetilde{f}} & Y \end{array}$$

Jos f on jatkuva, niin $\widetilde{f} = \mathrm{id}_Y \circ f \circ \mathrm{id}_X^{-1}$ on kolmen jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva. Jos taas $\widetilde{f}$ on jatkuva, niin $f = \mathrm{id}_Y^{-1} \circ \widetilde{f} \circ \mathrm{id}_X$ on kolmen jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva. □

MÄÄRITELMÄ 4.9. — Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X *metriikat* d *ja* $\widetilde{d}$ *ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja*, jos on $M > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{M} d(x, y) \leq \widetilde{d}(x, y) \leq M d(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$.

PROPOSITIO 4.10. — *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoot d ja $\widetilde{d}$ metriikoita joukolla X. Jos d ja $\widetilde{d}$ ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja, niin joukko $A \subset X$ on avoin metrisessä avaruudessa (X, d), jos ja vain jos se on avoin metrisessä avaruudessa $(X, \widetilde{d})$.*

Todistus. Oletetaan, että

$$\frac{1}{M} d(x, y) \leq \widetilde{d}(x, y) \leq M d(x, y)$$

jollain $M > 0$. Symmetrian vuoksi riittää osoittaa, että metriikan d suhteen avoimet joukot ovat avoimia metriikan $\widetilde{d}$ suhteen.

Olkoon $U \subset (X, d)$ avoin joukko. Osoitetaan, että U on avoin myös metriikan $\widetilde{d}$ suhteen. Olkoon $x \in U$. Oletuksen nojalla on $r > 0$, jolle $B_d(x, r) \subset U$. Olkoon $y \in B_{\widetilde{d}}(x, \frac{r}{M})$. Tällöin $d(x, y) \leq M\widetilde{d}(x, y) < M\,\frac{r}{M} = r$, joten

$$B_{\widetilde{d}}\Big(x, \frac{r}{M}\Big) \subset B_d(x, r) \subset U\,.$$

Siis x on joukon U sisäpiste avaruudessa $(X, \widetilde{d})$. □

SEURAUS 4.11. — *Bi-Lipschitz-ekvivalentit metriikat ovat ekvivalentteja.* □

4.2 Ekvivalentit normit

MÄÄRITELMÄ 4.12. — Vektoriavaruuden V *normit* $\|\cdot\|$ *ja* $\|\cdot\|'$ *ovat ekvivalentteja*, jos on $c > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{c}\|v\|' \leq \|v\| \leq c\|v\|'$$

kaikille $v \in V$.

LEMMA 4.13. — *Vektoriavaruuden V normit ovat ekvivalentit, jos ja vain jos ne määräävät bi-Lipschitz-ekvivalentit metriikat.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. □

LAUSE 4.14. — *Kaikki äärellisulotteisen vektoriavaruuden normit ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Voimme olettaa, että tarkasteltava vektoriavaruus on $\mathbb{R}^n$. Osoitetaan, että normi $\|\cdot\|$ on ekvivalentti euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa. Olkoon $e_1, e_2, \ldots e_n$ standardikanta. Tällöin kolmioepäyhtälön, normin homogeenisuuden ja Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön ja euklidisen normin perusominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}\|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| = \Big(\big(|x_1|, \ldots, |x_n|\big) \,\big|\, \big(\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\big)\Big) \\ &\leq \Big\|\big(|x_1|, \ldots, |x_n|\big)\Big\|_2 \Big\|\big(\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\big)\Big\|_2 \\ &\leq \sqrt{n}\,\max\Big\{\|e_i\| : 1 \leq i \leq n\|\Big\}\,\|x\|_2\,, \qquad (4.1)\end{aligned}$$

joten haluttu epäyhtälö saadaan toiseen suuntaan.

Vastakkaisen suunnan todistamiseksi huomataan, että käänteisen kolmioepäyhtälön ja epäyhtälön (4.1) nojalla normi $\|\cdot\|$ on Lipschitz-jatkuva: Kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\| \leq \sqrt{n}\,\max\Big\{\|e_i\| : 1 \leq i \leq n\|\Big\}\,\|x - y\|_2\,.$$

Siis kuvaus $x \mapsto \|x\|$ saavuttaa miniminsä $m > 0$ euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ suljetulla ja rajoitetulla[1] yksikköpallon pinnalla, joten kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geq m\,.$$

Haluttu epäyhtälö $\|x\| \geq m\|x\|_2$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ seuraa tästä, koska $\|0\| = \|0\|_2 = 0$. □

Palaamme Lauseen 4.9 jälkimmäisen suunnan todistuksessa käytettyyn differentiaalilaskennan/vektorifunktioiden analyysin kursseilta tuttuun minimiargumenttiin yleisemmässä metristen avaruuksien yhteydessä Luvussa 7.

[1] siis kompaktilla

4.3 Tuloavaruudet

Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) karteesisesta tulosta saadaan metrinen avaruus esimerkiksi varustamalla tulojoukko $X \times Y$ jollain seuraavista metriikoista:

Määritelmä 4.15. —

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) = \|(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))\|_1 \\
\mathbf{d}_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2 + d_Y(y_1,y_2)^2} = \|(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))\|_2 \\
\mathbf{d}_{\max}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \max\Big(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\Big) = \|(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))\|_\infty .
\end{aligned}$$

Huomaa, että käytettävät merkinnät ovat maksimimetriikkaa $\mathbf{d}_{\max}$ lukuunottamatta samat kuin luvussa 1.2 samaan tapaan määritellyille vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ metriikoille. Tämä tuskin aiheuttaa suurta sekaannusta, koska asiayhteydestä selviää, mitä merkinnällä kulloinkin tarkoitetaan.

Lemma 4.16. — *Lausekkeet $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ ja $\mathbf{d}_{\max}$ määrittelevät metriikat tuloavaruudessa $X \times Y$.*

Todistus. Se, että $\mathbf{d}_1$ ja $\mathbf{d}_{\max}$ ovat metriikoita osoitetaan Harjoitustehtävissä 4.6 ja 4.7. Tarkastetaan, että myös $\mathbf{d}_2$ on metriikka. Kolmioepäyhtälö on jälleen oleellisin asia: Olkoot $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in X \times Y$. Tällöin määritelmän, avaruuksien X ja Y kolmioepäyhtälöiden, tason vektoritulkinnan ja euklidisen tason kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))^2 &= d_X(x_1,x_2)^2 + d_Y(y_1,y_2)^2 \\
&\le (d_X(x_1,x_3) + d_X(x_3,x_2))^2 + (d_Y(y_1,y_3) + d_Y(y_3,y_2))^2 \\
&= \|(d_X(x_1,x_3), d_Y(y_1,y_3)) + (d_X(x_3,x_2), d_Y(y_3,y_2))\|_2^2 \\
&\le \Big(\|(d_X(x_1,x_3), d_Y(y_1,y_3))\|_2 + \|(d_X(x_3,x_2), d_Y(y_3,y_2))\|_2\Big)^2 \\
&= \Big(\mathbf{d}_2((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + \mathbf{d}_2((x_3,y_3),(x_2,y_2))\Big)^2 .
\end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälö seuraa tästä. □

Propositio 4.17. — *Metriikat $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ ja $\mathbf{d}_{\max}$ ovat bi-Lipschitz-ekvivalentteja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 4.18. — *Metriset avaruudet $(X \times Y, \mathbf{d}_1)$, $(X \times Y, \mathbf{d}_2)$ ja $(X \times Y, \mathbf{d}_{\max})$ ovat homeomorfisia. Erityisesti identtinen kuvaus on homeomorfismi näiden avaruuksien välillä.* □

Jatkossa käytämme tilanteen mukaan jotain metriikoista $\mathbf{d}_{\max}$, $\mathbf{d}_1$ tai $\mathbf{d}_2$ tuloavaruuden tarkastelussa.

Usein $\mathbf{d}_1$ ja $\mathbf{d}_{\max}$ ovat teknisesti hyviä valintoja. Jos tuloksessa ei mainita, mikä metriikoista on käytössä, väite pätee kaikille niille.

Propositio 4.19. — *Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) ja (Z, d_Z) metrisiä avaruuksia. Tällöin*

(1) *kuvaukset* $p_X : X \times Y \to X$, $p(x,y) = x$ *ja* $p_Y : X \times Y \to Y$, $p(x,y) = y$ *ovat jatkuvia.*

(2) *Kuvaus* $F : Z \to X \times Y$ *on jatkuva, jos ja vain jos komponenttikuvaukset* $F_X = p_X \circ F$ *ja* $F_Y = p_Y \circ F$ *ovat jatkuvia.*

Todistus. (1) Varustetaan tuloavaruus $X \times Y$ maksimimetriikalla $\mathbf{d}_{\max}$. Riittää tarkastella kuvausta p_X. Olkoon $(x_0, y_0) \in X \times Y$. On helppo nähdä, että p_X on 1-Lipschitz:

$$d_X(p_X(x,y), p_X(x_0,y_0)) = d_X(x,x_0) \le \max\Big(d_X(x,x_0), d_Y(y,y_0)\Big) = \mathbf{d}_{\max}((x,y),(x_0,y_0)) \,.$$

Siis p_X on jatkuva.
(2) Harjoitustehtävä. $\square$

SEURAUS 4.20. — *Avointen joukkojen tulo on avoin. Suljettujen joukkojen tulo on suljettu.*

Todistus. (1) Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$ avoimia joukkoja. Tällöin

$$A \times B = p_X^{-1}(A) \cap p_Y^{-1}(B) \,.$$

Koska projektiokuvaukset P_X ja p_Y ovat jatkuvia Proposition 4.13(1) nojalla, joukot $p_X^{-1}(A)$ ja $p_Y^{-1}(B)$ ovat avoimia. Siis $A \times B$ on avoin.
(2) Harjoitustehtävä. $\square$

Harjoitustehtäviä

MÄÄRITELMÄ 4.21. — Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $M \ge 1$. Kuvaus $F : X \to Y$ on *M-bi-Lipschitz-kuvaus*, jos kaikille $x_1, x_2 \in X$ pätee

$$\frac{d_X(x_1,x_2)}{M} \le d_Y(F(x_1), F(x_2)) \le M\, d_X(x_1,x_2) \,.$$

Jos F on M-bi-Lipschitz-kuvaus jollakin $M > 1$, niin se on *bi-Lipschitz-kuvaus.*

4.1. Osoita, että surjektiivinen bi-Lipschitz-kuvaus on homeomorfismi

Olkoon tehtävissä $h : X \to Y$ homeomorfismi. Olkoon $E \subset X$.

4.2. Osoita, että $h(\overline{E}) = \overline{h(E)}$ ja $h(\operatorname{int} E) = \operatorname{int} h(E)$.

4.3. Osoita, että $h(\partial E) = \partial h(E)$.

4.4. Osoita, että Harjoitustehtävässä 1.4 määritelty metriikka d on ekvivalentti euklidisen metriikan joukkoon $\mathbb{R} - \{0\}$ indusoiman metriikan kanssa.

4.5. Olkoot $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ normeja vektoriavaruudessa V. Osoita, että normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos ne määräävät saman topologian.

4.6. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että $\mathbf{d}_1$ on metriikka joukossa $X \times Y$.

4.7. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että $\mathbf{d}_{\max}$ on metriikka joukossa $X \times Y$.

4.8. Todista Proposition 4.13 kohta (2).

4.9. Osoita, että metriikka $d\colon X \times X \to \mathbb{E}^1$ on jatkuva funktio.[2]

4.10. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoot $\mathbf{d}_{\max}$, $\mathbf{d}_1$ ja $\mathbf{d}_2$ kuten luvun 4.3 alussa. Osoita, että

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\le \mathbf{d}_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\le \mathbf{d}_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &\le 2\,\mathbf{d}_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

kaikille $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$.[3]

4.11. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Olkoot $C \subset X$ ja $D \subset Y$ suljettuja joukkoja. Osoita, että $C \times D$ on suljettu?

4.12. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Olkoot $F \subset X$ ja $G \subset Y$. Määritä $\partial(F \times G)$.

---

[2] Kannattaa käyttää summametriikkaa $\mathbf{d}_1$ tuloavaruudessa $X \times X$.

[3] Keskimmäisen epäyhtälön todistuksessa huomaa, että $\|(a, b)\|_{\mathbb{E}^2} = \|(a, 0) + (0, b)\|_{\mathbb{E}^2}$ ja tutki Lauseen 4.9 todistusta.

Luku 5

Jonot ja raja-arvot

5.1 Suppenevat jonot ja Cauchyn jonot

MÄÄRITELMÄ 5.1. — Olkoon $A \neq \emptyset$. Kuvaus $a\colon \mathbb{N} - \{0\} \to A$ on joukon A *jono.* [1] Yleisesti jonon arvoja merkitään $a_n = a(n)$ ja jonolle käytetään merkintää $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$.

Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee kohti raja-arvoa* $x \in X$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in B(x, \varepsilon)$ kaikilla $k \geq N$. Jos jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, käytetään merkintöjä $x_n \to x$, kun $x \to \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} = x$.

LEMMA 5.2. — *Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa $x \in X$, jos ja vain jos $d(x_n, x) \to 0$, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

LEMMA 5.3. — *Jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoot $a, b \in X$ siten, että $d(x_n, a) \to 0$ ja $d(x_n, b) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \to 0$, kun $n \to \infty$, joten $d(a, b) = 0$. Siis $a = b$. □

ESIMERKKI 5.4. — Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Harjoitustehtävässä 1.13 osoitettiin, että jonon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppeneminen metrisessä avaruudessa $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$ on sama asia kuin se, että funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$.

PROPOSITIO 5.5. — *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Tällöin $\overline{E}$ koostuu kaikista joukon E alkioista muodostettujen avaruuden X suppenevien jonojen raja-arvoista.*

Todistus. Jokainen joukon E piste on vakiojonon raja-arvo. On selvää, että mikään joukon E ulkopiste ei ole joukon E jonon raja-arvo. Riittää siis osoittaa, että jokainen joukon E reunapiste on jonkin joukon E jonon raja-arvo. Olkoon $x_0 \in \partial E$. Tällöin $B(x_0, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$

[1] Yhtä hyvin jono voi olla kuvaus $a\colon \mathbb{N} \to A$, tällöin indeksointi aloitetaan nollasta.

jokaisella $k > 1$. Valitaan jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ alkio $e_k \in B(x_0, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset$. Tällöin $x_0 = \lim_{k\to\infty} e_k$. □

Määritelmä 5.6. — Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ kaikille $m, n \geq N$.

Lemma 5.7. — *(1) Suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.*
(2) Cauchyn jonot ovat rajoitettuja.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Aiemmilta kursseilta tiedämme, että reaalilukujen avaruuden $\mathbb{E}^1$ täydellisyyden nojalla kaikki Cauchyn jonot suppenevat euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Vastaava tulos ei päde kaikissa metrisissä avaruuksissa kuten seuraava alkeellinen esimerkki osoittaa:

Esimerkki 5.8. — Olkoon

$$X = \left\{ \frac{1}{k} \in \mathbb{E}^1 : k \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

ja olkoon $\mathbf{d}_1$ avaruuden $\mathbb{E}^1$ metriikan indusoima metriikka joukossa X. Jono $(\frac{1}{k})_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn metrisessä avaruudessa $(X, \mathbf{d}_1)$, koska se on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{E}^1$. Jono $(\frac{1}{k})_{k=1}^{\infty}$ ei kuitenkaan suppene. Tämä on helppo tarkastaa: Jos se suppenisi raja-arvoon $\frac{1}{N}$, niin se suppenisi tähän raja-arvoon myös avaruudessa $\mathbb{E}^1$. Mutta avaruudessa $\mathbb{E}^1$ pätee $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla mikään $\frac{1}{N}$ ei ole raja-arvo. Väite voidaan todistaa myös viittaamatta avaruuteen $\mathbb{E}^1$: Olkoon $\frac{1}{n_0} \in X$. Kun $k > n_0$, pätee

$$\mathbf{d}_1\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{k}\right) \geq \frac{1}{n_0\,(n_0+1)},$$

joten $\frac{1}{n_0}$ ei ole jonon raja-arvo.

Määritelmä 5.9. — Joukon E *halkaisija* on

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(a, b) : a, b \in E\}.$$

Lemma 5.10. — *Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos* $\operatorname{diam}\{x_k : k \geq n\} \to 0$, *kun $n \to \infty$.*

Todistus. Määritelmän mukaan $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ kaikille $m, n \geq N$. Yhtäpitävästi jokaisella $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\{d(x_m, x_n) : m, n \geq N\} \subset [0, \varepsilon[$, toisin sanoen $\operatorname{diam}\{x_k : k \geq n\} \to 0$, kun $n \to \infty$. □

Lemma 5.11. — *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Tällöin*[2]
(1) Jono $(x_k, y_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa $(x, y) \in X \times Y$, jos ja vain jos jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa $x \in X$ ja jono $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa $y \in Y$.
(2) Jono $(x_k, y_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos jonot $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ ovat Cauchyn jonoja.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

[2]Muista Seurauksen 4.12 jälkeen tehty sopimus tuloavaruuden metriikoista.

5.2 Osajonot

MÄÄRITELMÄ 5.12. — Olkoon $a\colon \mathbb{N} \to A$ jono ja olkoon $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kasvava injektio. Kuvaus $a \circ i$ on jonon a *osajono*. Kun jonolle a käytetään merkintää $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, osajonolle $a \circ i$ käytetään merkintää $a \circ i = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, missä $a_{n_k} = a_{i(k)} = a(i(k))$.

ESIMERKKI 5.13. — Olkoon $a_k = (-1)^k \in \mathbb{E}^1$. Olkoot $i, j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kuvaukset $i(k) = 2k$ ja $j(k) = 2k+1$. Tällöin $a \circ i$ on parillisten indeksien osajono $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, joka on tässä tapauksessa vakiojono 1 ja $a \circ j$ on parittomien indeksien osajono $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, joka on tässä tapauksessa vakiojono -1.

LEMMA 5.14. — *Suppenevan jonon osajonot ovat suppenevia ja niillä on sama raja-arvo. Cauchyn jonon osajonot ovat Cauchyn jonoja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

LEMMA 5.15. — *Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ Cauchyn jono, jolla on suppeneva osajono. Tällöin jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on suppeneva ja sen raja-arvo on sama kuin osajonon raja-arvo.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

5.3 Jonot ja jatkuvat kuvaukset

LEMMA 5.16. — *Jatkuva kuvaus kuvaa suppenevat jonot suppeneviksi jonoiksi.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ suppeneva jono avaruudessa X ja olkoon x sen raja-arvo. Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden nojalla on $\delta > 0$ siten, että $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$. Raja-arvon määritelmän nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in B(x,\delta)$ kaikilla $k \geq N$. Siis kaikilla $k \geq N$ pätee $f(x_k) \in f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$, joten $f(x_k) \to f(x)$, kun $k \to \infty$. □

ESIMERKKI 5.17. — Olkoon $x_k = \frac{1}{k} \in \,]0,\infty[$ kaikilla $k \geq \mathbb{N} - \{0\}$. Metrisen avaruuden $(]0,\infty[, \mathbf{d}_1)$ jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono kuten Esimerkissä 5.6 todettiin. Kuvaus $g\colon]0,\infty[\,\to\,]0,\infty[$, $g(x) = \frac{1}{x}$, on jatkuva. Jono $(g(x_k))_{k=1}^\infty$ ei ole Cauchyn jono koska $g(x_k) = k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Cauchyn jonot säilyvät Cauchyn jonoina, jos niitä kuvataan hieman säännöllisemmillä kuin jatkuvilla kuvauksilla.

MÄÄRITELMÄ 5.18. — Olkoot (X_1, d_1) ja (X_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ on *tasaisesti jatkuva*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x), F(y)) < \varepsilon$ kaikilla $x, y \in X_1$, joille $d_1(x,y) < \delta$.

LEMMA 5.19. — *Tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva.*

Todistus. Tämä on selvää. □

Seuraava helppo esimerkki osoittaa, että kaikki jatkuvat kuvaukset eivät ole tasaisesti jatkuvia. Toisaalta monet tapaamamme kuvaukset ovat tasaisesti jatkuvia.

ESIMERKKI 5.20. — (1) Kuvaus $g\colon \mathbb{E}^1 - \{0\} \to \mathbb{E}^1$, $g(t) = \frac{1}{t}$ on jatkuva mutta ei tasaisesti jatkuva.

(2) Harjoitustehtävässä 3.1 osoitettiin, että Lipschitz-kuvaukset ovat jatkuvia. Todistus itse asiassa osoittaa, että ne ovat tasaisesti jatkuvia. Erityisesti isometriset upotukset ovat tasaisesti jatkuvia.

(3) Kuvaus $s\colon ([0,\infty[, \mathbf{d}_1) \to \mathbb{E}^1$, $s(t) = \sqrt{t}$ on tasaisesti jatkuva: Sen rajoittuma välin $[0,1]$ komplementtiin on 1-Lipschitz koska havainnosta

$$|x-y| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\,|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$$

saadaan

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} < |x-y|\,.$$

Analyysin kursseilla on osoitettu, että suljetun ja rajoitetun välin jatkuvat kuvaukset ovat tasaisesti rajoitettuja. Valitsemalla kullekin $\varepsilon > 0$ pienempi näiden kahden välin antamista luvuista $\delta > 0$ näemme, että s on tasaisesti jatkuva.

Kuvaus s ei ole Lipschitz-jatkuva: Jos s olisi M-Lipschitz, niin

$$(\sqrt{2}-1)\sqrt{t} = |s(2t)-s(t)| \le M|2t-t| = Mt$$

kaikille $t \in]0, \frac{1}{2}]$. Siis $\sqrt{t} \ge \frac{\sqrt{2}-1}{M}$ kaikilla $t \in]0, \frac{1}{2}]$, mutta tämä ei pidä paikkaansa.

PROPOSITIO 5.21. — *Tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

5.4 Kuvauksen raja-arvo

MÄÄRITELMÄ 5.22. — Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \overline{A}$. Kuvauksella $f\colon A \to Y$ on *raja-arvo* $b \in Y$ pisteessä a, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että

$$f\Big(\big(B(a,\delta) - \{a\}\big) \cap A\Big) \subset B(b,\varepsilon)\,.$$

Jos kuvauksella $f\colon X \to Y$ on *raja-arvo* $b \in Y$ pisteessä a, käytetään merkintöjä $f(x) \to b$, kun $x \to a$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

PROPOSITIO 5.23. — *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \overline{A}$ ja olkoon $f\colon A \to Y$. Tällöin $b = \lim_{x\to a} f(x)$, jos ja vain jos $b = \lim_{k\to\infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon $A - \{a\}$ alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.*

Todistus. Oletetaan, että $b = \lim_{k\to\infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Jos b ei ole funktion f raja-arvo pisteessä a, niin on $\varepsilon > 0$ siten, että jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ on $\overline{a}_k \in B(a, \frac{1}{k}) \cap A$, jolle $f(\overline{a}_k) \notin B(b,\varepsilon)$. Tällöin $\overline{a}_k \to a$, kun $k \to \infty$ mutta $f(\overline{a}_k)$ ei suppene raja-arvoon b vastoin oletusta.

Toinen suunta todistetaan kuten Lemma 5.12. □

Harjoitustehtäviä

5.1. Osoita, että suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.

5.2. Osoita, että Cauchyn jonot ovat rajoitettuja.

5.3. Olkoon (X, d) ultrametrinen avaruus. Olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avaruuden X jono, jolle pätee

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_{k+1}) = 0\,.$$

Osoita, että $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono.

5.4. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta, jossa tehtävän 5.3 väite ei päde.

5.5. Todista Lemma 5.8.

5.6. Olkoot $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenevia jonoja normiavaruudessa V ja olkoot $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenevia reaalilukujonoja. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = \lim_{k\to\infty}\lambda_k \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty}\mu_k \lim_{k\to\infty} y_k\,.$$

5.7. Osoita, että tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.

5.8. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Olkoon $a \in \overline{A}$ ja olkoon $f\colon A \to Y$ siten, että $b = \lim_{x\to a} f(x)$. Osoita, että $b = \lim_{k\to\infty} f(a_k)$ kaikille pisteeseen a suppeneville joukon A alkioista muodostetuille jonoille $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.

5.9. Todista Lemma 5.10.

5.10. Todista Lemma 5.11.

5.11. Olkoot d ja d' metriikoita joukossa X. Olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ joukon X jono, joka suppenee metrisessä avaruudessa (X, d) mutta ei suppene metrisessä avaruudessa (X, d'). Osoita, että metriikat d ja d' eivät ole ekvivalentteja.

5.12. Osoita, että normit

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

eivät ole ekvivalentteja vektoriavaruudessa $\mathrm{C}^0([0,1])$.[3]

[3] Tehtävä 5.11 auttaa.

Luku 6

Täydellisyys

6.1 Täydellinen metrinen avaruus

MÄÄRITELMÄ 6.1. — Metrinen avaruus X on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

ESIMERKKI 6.2. — Analyysin kursseilta muistamme, että $\mathbb{E}^1$ on täydellinen. Harjoituksissa osoitetaan Lemman 5.8 nojalla $\mathbb{E}^n$ on täydellinen.

LEMMA 6.3. — *Olkoon $A \neq \emptyset$. Tällöin avaruus* $\mathrm{raj}(A, \mathbb{E}^1)$ *on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono. Tällöin jono $(f_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono jokaisella $a \in A$. Koska $\mathbb{E}^1$ on täydellinen, jono $(f_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee jokaisella $a \in A$. Määritellään $f\colon A \to \mathbb{E}^1$ asettamalla

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} f_k(a)$$

jokaisella $a \in A$. Jono $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu Lemman 5.5 nojalla. Siis $\|f_k\| \leq M$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten on $x_0 \in \mathbb{E}^1$ ja $M > 0$, joille pätee $f_k(a) \in \overline{B}(0, M)$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siis $f(a) \in \overline{B}(0, M)$ kaikilla $a \in A$ ja $f \in \mathrm{raj}(A, \mathbb{E}^1)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono, niin on $N > 0$ siten, että $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$ jokaisella $k, m \geq N$. Siis jokaisella $a \in A$ pätee $|f_k(a) - f_m(a)| < \varepsilon$, kun $k, m \geq N$ joten $|f_k(a) - f(a)| \leq \varepsilon$ kaikilla $a \in A$, kun $k \geq N$. Siis

$$\|f_k - f\| = \sup_{a\in A} \|f_k(a) - f(a)\|_\infty \leq \varepsilon\,,$$

kun $k \geq N$. □

LEMMA 6.4. — *Olkoon (X, d_X) täydellinen metrinen avaruus. Joukko $E \subset X$ on suljettu, jos ja vain jos metrinen avaruus (E, d_X) on täydellinen.*

Todistus. Jos E on suljettu, niin kaikkien joukon E alkioista muodostettujen suppenevien jonojen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ raja-arvot ovat joukossa E Proposition 5.4 nojalla. Metrisen avaruuden (E, d_X) jono on Cauchyn jono, jos ja vain jos se on avaruuden (X, d_X) Cauchyn jono.

Suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja Lemman 5.5 nojalla. Siis kaikki avaruuden (E, d_X) Cauchyn jonot suppenevat, joten se on täydellinen.

Oletetaan sitten, että (E, d_X) on täydellinen. Joukon E alkioista muodostetut avaruuden (X, d_X) suppenevat jonot ovat avaruuden (E, d_X) Cauchyn jonoja. Siis ne suppenevat avaruudessa (E, d_X). Mutta tällöin niiden raja-arvot avaruuden (X, d_X) jonoina sisältyvät osajoukkoon E, joten E on suljettu Proposition 5.4 nojalla. □

Propositio 6.5. — *Olkoon X metrinen avaruus. Normiavaruus $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen.*

Todistus. Kuten Esimerkissä 1.10 voidaan osoittaa, että $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellisen normiavaruuden $\mathrm{raj}(X, \mathbb{E}^1)$ aliavaruus. Osoitetaan, että $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ on suljettu. Tällöin väite seuraa Lemmasta 6.3.

Proposition 5.4 nojalla riittää osoittaa, että kaikki avaruuden $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ Cauchyn jonot suppenevat. Olkoon $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono. Se on Cauchyn jono avaruudessa $\mathrm{raj}(X, \mathbb{E}^1)$, joten se suppenee tässä avaruudessa kohti rajafunktiota f. Osoitamme, että f on jatkuva.[1] Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\|f_k - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$, kun $k \geq N$ ja $\delta > 0$ siten, että $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, kun $d(x, x_0) < \varepsilon$. Kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\,,$$

kun $d(x, x_0) < \varepsilon$. □

Seuraus 6.6. — *Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ suljettu ja rajoitettu väli. Normiavaruus $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen.*

Todistus. Analyysin kursseilta muistamme, että suljetun ja rajoitetun välin jatkuvat funktiot ovat rajoitettuja. Väite seuraa siis Propositiosta 6.4. □

Täydellisiä normiavaruuksia kuten $\mathrm{raj}(A, \mathbb{E}^1)$ ja $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{E}^1)$ kutsutaan *Banachin avaruuksiksi.* Banachin avaruuksia tarkastellaan lähemmin funktionaalianalyysin kurssilla.

Määritelmä 6.7. — Olkoon X metrinen avaruus. Täydellinen metrinen avaruus $\widehat{X}$ on avaruuden X *täydellistymä*, jos on isometrinen upotus $j\colon X \to \widehat{X}$ siten, että $j(X)$ on tiheä.[2]

Osoitamme, että jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä. Käytämme apuna seuraavaa tärkeää tulosta.

Lause 6.8 (Kuratowskin upotuslause). — *Jokaisella metrisellä avaruudella X on isometrinen upotus $K\colon X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 3.14. □

Lause 6.9. — *Jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä.*

[1] Todistus on sama kuin analyysin kursseilla tapauksessa, jossa X on suljettu ja rajoitettu väli avaruudessa $\mathbb{E}^1$.

[2] Myös isometrista upotusta $j\colon X \to \widehat{X}$ sanotaan avaruuden X täydellistymäksi.

Todistus. Olkoon $K\colon X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ Kuratowskin upotus. Joukko $\overline{K(X)}$ on suljettu, joten varustettuna avaruuden $\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{E}^1)$ metriikalla se on täydellinen metrinen avaruus Lemman 6.3 nojalla. Määritelmän nojalla $K(X)$ on tiheä avaruudessa $\overline{K(X)}$. □

Lause 6.10. — *Metrisen avaruuden täydellistymä on isometriaa vaille yksikäsitteinen: Jos $i\colon X \to Y$ ja $j\colon X \to Z$ ovat metrisen avaruden X täydellistymiä. Tällöin on isometria $h\colon Y \to Z$, jolle $h \circ i = j$.*

Todistus. Määritellään kuvaus $g\colon i(X) \to j(X)$ asettamalla $g = j \circ i^{-1}$. Olkoon $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono joukossa $i(X)$. Tällöin on $\lim_{k\to\infty} y_k = y \in Y$. Isometriana g on tasaisesti jatkuva, joten $(g(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Siis jono $(g(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee avaruudessa Z.

Määritellään $h(y) = \lim_{k\to\infty} g(y_k)$. Määritelmä on hyvin asetettu: Jos $(\overline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on toinen joukon $i(X)$ jono, joka suppenee raja-arvoon y, niin $\lim_{k\to\infty} g(y_k) = \lim_{k\to\infty} g(\overline{y}_k)$: Koska g on isometria, niin jono $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, joka määritellään asettamalla $z_{2k} = g(y_k)$ ja $z_{2k+1} = g(\overline{y}_k)$ on Cauchyn jono. Siis se suppenee, joten parillisten ja parittomien indeksien osajonoilla on sama raja-arvo.

Osoitetaan, että $h\colon i(X) \to j(X)$ on isometria: Olkoot $a, b \in Y$. Tällöin $a = \lim a_k$ ja $b = \lim b_k$ joillain Cauchyn jonoilla $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Kuvauksen g isometrisyyden nojalla

$$d(a, b) = \lim d(a_k, b_k) = \lim d(g(a_k), g(b_k)) = d(h(a), h(b))\,.$$

Siis h on isometrinen upotus. Mutta selvästi jokaisen avaruuden Z Cauchyn jonon alkukuva on Cauchyn jono, joten h on surjektio. □

Lause 6.11 (Cantorin leikkauslause). — *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot*

$$X \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$$

epätyhjiä sisäkkäisiä suljettuja joukkoja. Jos $\operatorname{diam}(E_k) \to 0$,[3] *kun $k \to \infty$, niin*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$$

jollain $x_0 \in X$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 6.12 (Suljettujen välien periaate). — *Olkoot $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ jono sisäkkäisiä suljettuja välejä euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Jos* $\operatorname{diam}(K_k) \to 0$*, kun $k \to \infty$*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$$

jollain $x_0 \in \mathbb{E}^n$. □

Esimerkki 6.13. — Proposition 6.9 ja Seurauksen 6.10 väite ei päde ilman oletusta, että joukot ovat suljettuja: Olkoot $I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$ kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ ja $\operatorname{diam}(K_k) \to 0$, kun $k \to \infty$ mutta $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset$.

[3] Koska reaalilukujen osajoukkona tyhjän joukon supremum on $-\infty$, niin tämä oletus sisältää sen, että joukot E_k eivät ole tyhjiä.

6.2 Banachin kiintopistelause

Määritelmä 6.14. — Olkoon X metrinen avaruus. Jos kuvaus $F\colon X \to X$ on K-Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on (K-)*kutistava.* Jos $F(x) = x$ jollain $x \in X$, niin x on kuvauksen F *kiintopiste.*

Lause 6.15 (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause). — *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F\colon X \to X$ on täsmälleen yksi kiintopiste. Jos F on K-kutistava ja x_0 on sen kiintopiste, niin*

$$d(x_0, F^k(x)) \leq K^k d(x_0, x)$$

kaikille $x \in X$.

Todistus. Olkoon $F\colon X \to X$ K-kutistava kuvaus. Huomataan varsinaiseta todistusta varten aluksi, että jokaisella $\varepsilon' > 0$ on $N(\varepsilon') > 0$ siten, että

$$\frac{K^m}{1-K} < \varepsilon' ,$$

kun $m \geq N(\varepsilon')$.

Olkoon $x \in X$ ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k}\, d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)) < \varepsilon , \end{aligned}$$

kun $m \geq N\Big(\frac{\varepsilon}{d(x,F(x))}\Big)$. Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono. Koska X on täydellinen, jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ suppenee kohti jotain pistettä $x_\infty \in X$.

Osoitetaan sitten, että piste x_∞ on kuvauksen F kiintopiste. Kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x_\infty, F(x_\infty)) &\leq d(x_\infty, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_\infty)) \\ &\leq (1+K) d(x_\infty, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \to 0, \end{aligned}$$

kun $j \to \infty$. Siis $d(x_\infty, F(x_\infty)) = 0$, joten $x_\infty = F(x_\infty)$.

Osoitetaan vielä, että kiintopisteitä on täsmälleen yksi. Jos x_∞ ja y_∞ ovat kiintopisteitä, niin

$$K d(x_\infty, y_\infty) \geq d(F(x_\infty), F(y_\infty)) = d(x_\infty, y_\infty) .$$

Oletuksen mukaan $K < 1$, joten $d(x_\infty, y_\infty) = 0$ ja $x_\infty = y_\infty$.

Viimeisen väitteen todistamiseksi huomataan, että kaikille $x \in X$ pätee

$$d(F^k(x), x_0) = d(F^k(x), F^k(x_0)) \leq K^k\, d(F^k(x), x_0) . \quad \square$$

Sovelluksia: Newtonin menetelmä ja Picardin iteraatio

Derivoituvan funktion nollakohtia voi etsiä numeerisesti *Newtonin menetelmällä*: Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ avoin väli ja olkoon $f \colon I \to \mathbb{E}^1$ derivoituva. Arvataan, että pisteen x_0 lähellä voisi olla funktion f nollakohta. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,,$$

jossa tangenttisuora leikkaa x-akselin. Iteroidaan tätä prosessia: Oletetaan, että piste x_k on konstruoitu. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_k, f(x_k))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,,$$

jossa tangenttisuora leikkaa x-akselin. Näin voidaan tehdä tietenkin vain, jos $f'(x_k) \neq 0$.

Geometrisen tarkastelun sijaan Newtonin menetelmää voidaankin siis tarkastella kuvauksen

$$x \mapsto F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterointina. Kuvauksen F kiintopisteessä x_0 pätee $x_0 = F(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, siis $f(x_0) = x_0$.

Osoitamme seuraavaksi, että sopivilla oletuksilla Newtonin menetelmä antaa hyvän likiarvon nollakohdalle erittäin nopeasti.

Lause 6.16 (Newtonin menetelmä). — *Olkoon $f \colon I \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Olkoon $J_0 \subset I$ suljettu ja rajoitettu väli. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä J_0 ja että sen derivaatalla ei ole nollakohtaa välillä J_0. Olkoon $F \colon J_0 \to \mathbb{R}$,*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Tällöin on jokin väli $J \subset J_0 \subset I$ siten, että jono $F^k(x)$ suppenee kohti funktion f nollakohtaa eksponentiaalisella nopeudella kaikilla $x \in J$.

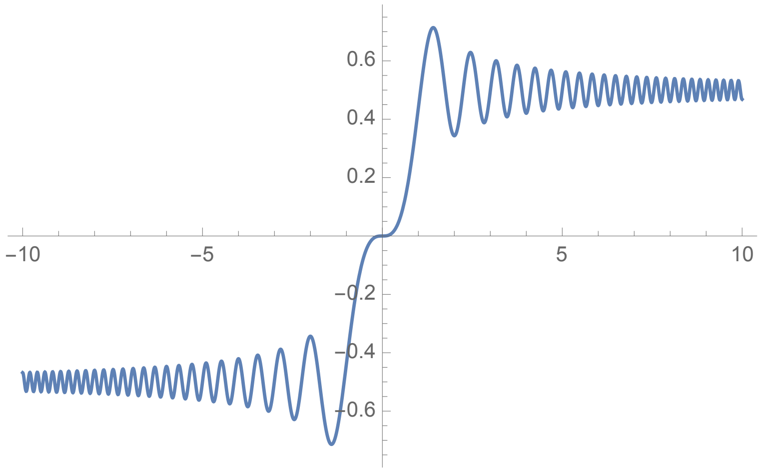
Todistus. Koska $F'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}$, niin funktion F kiintopisteessä x_0, joka on funktion f nollakohta, pätee $F'(x_0) = 0$. Siis jokaisella $0 < c < 1$ on pisteen x_0 ympäristö, jossa pätee $|F'(x)| \le c$. Tässä ympäristössä F on c-kutistava: Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on ξ pisteiden x_0 ja x välissä, jolle pätee

$$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0)\,.$$

Koska F on jatkuvasti derivoituva ja $|F'(x_0)| < 1$, niin jollain x_0-keskisellä välillä J pätee $|F'(y)| < K < 1$ jollain K kaikille $y \in J$. □

Esimerkki 6.17. — Esimerkiksi optiikassa esiintyvä *Fresnelin S-funktio* $S \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{R}$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right) dt\,.$$



Kuva 61: Fresnelin S-funktio.

Etsitään Newtonin menetelmällä likiarvoa pienimmälle positiiviselle muuttujan x arvolle, jolla $S(x) = \frac{1}{2}$. Olkoon siis $h = S - \frac{1}{2}$. Arvataan kuvien 61 ja 62 perusteella, että funktion h nollakohta on pisteen $x_0 = 0.8$ lähellä. Olkoon $F_h(t) = t - \frac{h(t)}{h'(t)}$.

Ei ole kovin vaikea tarkastaa, että Newtonin menetelmässä käytettävä kuvaus

$$F_h'(x) = \pi\, t \left(S(x) - \frac{1}{2}\right) \cot \frac{\pi\, t^2}{2}$$

toteuttaa $|F_h'(x)| < \frac{1}{2}$ välillä $[0.8, 1.2]$. Koska funktion S nollakohta x_∞ on tällä välillä, pätee $|0.8 - x_\infty| \leq 0.4$. Lauseen 6.13 nojalla pätee

$$|F_h^k(0.8) - x_\infty| \leq \frac{1}{5}\frac{1}{2^k} < 0.001$$

kun $k \geq 8$.

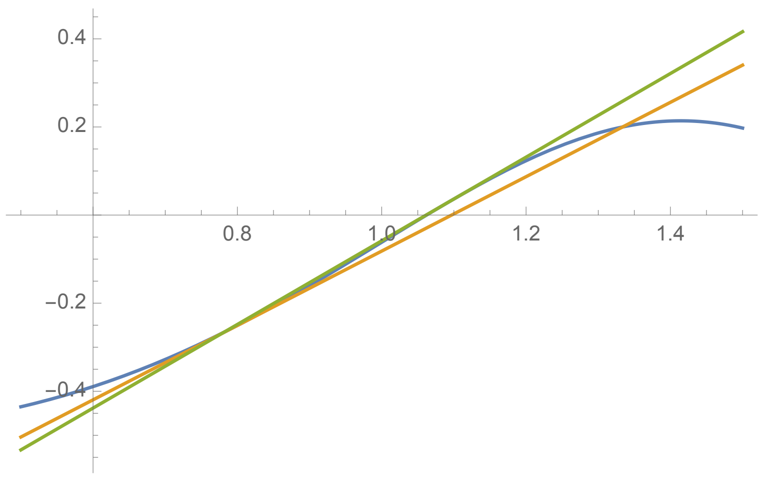
Kokeilemalla nähdään, että iteraatit suppenevat kohti nollakohtaa huomattavasti nopeammin kuin edellä arvioitiin:

k	t	$h(t)$	$F_h(t)$
	0.8	-0.251	1.09687
1	1.09687	0.0335346	1.06156
2	1.06156	-0.000585372	1.06215
3	1.06215	$-1.18172\ 10^{-7}$	1.06215

Kolmas ja neljäs iteraatti antavat siis saman arvon viiden desimaalin tarkkuudella. Näyttää siltä, että likiarvo jonon $(F_h^k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ raja-arvolle on löytynyt ja että se on funktion h nollakohta.

Esimerkki 6.18. — Olkoon $f\colon \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ on M-Lipschitz ja olkoon $\delta < \frac{1}{M}$. *Picardin operaattori* $\mathscr{P}_{a,b}\mathrm{C}^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{E}^n)$ määritellään asettamalla

$$\mathscr{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s))ds$$



Kuva 62: Fresnelin S-funktion $\frac{1}{2}$-arvon etsiminen Newtonin menetelmällä graafisesti.

kaikille $\phi \in \mathrm{C}^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n)$. Nyt

$$\begin{aligned}\|\mathscr{P}_{a,b}(\phi) - \mathscr{P}_{a,b}(\psi)\|_\infty &= \max_{|t-a|\le\delta} \left\| \int_a^t (f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s)))ds \right\| \\ &\le \max_{|t-a|\le\delta} \int_a^t \|f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))\|\, ds \\ &\le \delta\, M\, \|\phi - \psi\|_\infty < \|\phi - \psi\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Siis Picardin operaattori on kutistava.

Analyysin peruslauseen nojalla funktio $x\colon]a-\delta, a+\delta[$ on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

ratkaisu, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin kiintopiste. Koska operaattori on kutistava, sillä on Banachin kiintopistelauseen nojalla täsmälleen yksi kiintopiste.

Harjoitustehtäviä

6.1. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Osoita, että tuloavaruus $X \times Y$ on täydellinen, jos ja vain jos X ja Y ovat täydellisiä.

6.2. Osoita, että euklidinen avaruus $\mathbb{E}^n$ on täydellinen metrinen avaruus.[4]

6.3. Onko Ranskan rautatieavaruus $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$ täydellinen metrinen avaruus?[5]

6.4. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot $X \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ epätyhjiä sisäkkäisiä suljettuja joukkoja. Oletetaan, että $\operatorname{diam}(E_k) \to 0$, kun $k \to \infty$. Osoita, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$$

[4] Katso Esimerkki 6.1.

[5] Ranskan rautatieavaruuden Cauchyn jonon alkioiden normien jonon tarkastelusta voi olla hyötyä.

jollain $x_0 \in X$.

6.5. Anna esimerkki homeomorfisista metrisistä avaruuksista X ja Y siten, että X on täydellinen ja Y ei ole täydellinen.

6.6. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Osoita, että Y on täydellinen, jos on surjektiivinen bi-Lipschitz-kuvaus $F\colon X \to Y$.

6.7. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoon $F\colon X \to X$ kuvaus, jolle F^p on kutistava jollain $p \in \mathbb{N}$. Osoita, että kuvauksella F on täsmälleen yksi kiintopiste.

Luku 7

Kompaktius

7.1 Kompaktit joukot

Määritelmä 7.1. — Kokoelma $(U_j)_{j\in J}$ on joukon B *peite*, jos $B \subset \bigcup_{j\in J} U_j$ ja se on *avoin peite*, jos joukot U_j ovat avoimia. Peite on *äärellinen*, jos indeksijoukko J on äärellinen. Jos $J' \subset J$, niin peite $(U_j)_{j\in J'}$ on peitteen $(U_J)_{j\in J}$ *osapeite.*

Esimerkki 7.2. — Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $x_0 \in X$. Kokoelma $(B(x_0, r))_{r>0}$ on metrisen avaruuden X avoin peite. Kokoelma $(B(x_0, n))_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ on peitteen $(B(x_0, r))_{r>0}$ osapeite.

Määritelmä 7.3. — Metrisen avaruuden X osajoukko A on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Esimerkki 7.4. — (1) Äärelliset metriset avaruudet ovat kompakteja.

(2) Metrinen avaruus $\mathbb{E}^n$ ei ole kompakti koska sen avoimella peitteellä $(B(0, r))_{r>0}$ ei ole äärellistä osapeitettä: Peitteen pallot ovat sisäkkäisiä, joten jokaiselle äärelliselle $J \subset [0, \infty[$ pätee

$$\bigcup_{j\in J} B(0, j) = B(0, \max J) \subsetneq \mathbb{E}^n .$$

(3) Olkoon A ääretön joukko. Diskreetti metrinen avaruus (A, δ) ei ole kompakti koska sen avoimella peitteellä $\Big\{\{a\} : a \in A\Big\}$ ei ole avointa osapeitettä.

(4) Osoitamme luvussa 7.3, että euklidisen suoran $\mathbb{E}^1$ suljetut rajoitetut välit ovat kompakteja.

Propositio 7.5. — *Kompakti joukko on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $K \subset X$ kompakti. Se, että joukon K tulee olla rajoitettu todistetaan samalla tavalla kuin Esimerkissä 7.2(2) osoitettiin, että $\mathbb{E}^n$ ei ole kompakti.

Osoitetaan sitten, että K on suljettu. Olkoon $x \in X - K$. Olkoon $U_k = X - \overline{B}(x, \frac{1}{k})$. Kokoelma $(U_k)_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}$ on kompaktin joukon K avoin peite. Siis on $n \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$K \subset U_n$, joten $B(x, \frac{1}{n}) \subset X - K$. Siis x on joukon K komplementin sisäpiste, joten K on suljettu. □

Luvussa 7.3 todistamme Heinen ja Borelin lauseen, jonka mukaan euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. Tämä kompaktien joukkojen luonnehdinta ei päde yleisesti.

Esimerkki 7.6. — (1) Diskreetti metrinen avaruus on suljettu ja rajoitettu mutta Esimerkissä 7.2 huomasimme, että se ei ole kompakti, jos se ei ole äärellinen

(2) Olkoon d avaruuden $\mathbb{E}^1$ metriikan indusoima metriikka joukossa $]0,1]$. Metrinen avaruus $(]0,1], d)$ on suljettu[1] ja rajoitettu. Kokoelma

$$\left(\left]\frac{1}{k}, 1\right]\right)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$$

on joukon $]0,1]$ avoin peite, jolla ei ole äärellistä osapeitettä: Jos $n \geq m$, niin $]\frac{1}{m}, 1] \subset]\frac{1}{n}, 1]$, joten jokaiselle äärelliselle osajoukolle $J \subset \mathbb{N} - \{0\}$ pätee

$$\bigcup_{j \in J} \left]\frac{1}{j}, 1\right] = \left]\frac{1}{\max J}, 1\right] \subsetneq]0,1] \,.$$

Propositio 7.7. — *Olkoon X metrinen avaruus.*

(1) Jos X on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin E on kompakti.

(2) Jos $K \subset X$ on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin $E \cap K$ on kompakti.

(3) Jos $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset X$ ovat kompakteja, niin $\bigcup_{k=1}^n E_k$ on kompakti.

(4) Jos $A \neq \emptyset$ ja joukot $E_\alpha \subset X$ ovat kompakteja kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on kompakti.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 7.8. — *Kompakti metrinen avaruus on separoituva.*

Todistus. Olkoon K kompakti. Joukon K peitteellä $(B(x, \frac{1}{k})_{x \in K})$ on äärellinen osapeite $B(x_{k1}, \frac{1}{k}), , \ldots, B(x_{kn_k}, \frac{1}{k})$. Joukko $\{x_{kj} : k \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq n_k\}$ on numeroituva tiheä osajoukko. □

Propositio 7.9. — *Kompaktin metrisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste.*

Todistus. Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon $A \subset K$ joukko, jolla ei ole kasautumispisteitä. Jokaisella $x \in K$ on $r_x > 0$ siten, että

$$B(x, r_x) \cap A \subset \{x\} \,.$$

Avaruuden K avoimella peitteellä $(B(x, r_x))_{x \in K}$ on äärellinen osapeite. Siis joukko A on äärellinen. □

[1]Koska koko avaruus on suljettu osajoukko.

Seuraus 7.10. — *Kompakti metrinen avaruus on täydellinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. Seuraa Propositiosta 7.7 ja Lemmasta 5.11. □

Määritelmä 7.11. — Metrisen avaruuden X osajoukko A on *jonokompakti*, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä.

Lause 7.12 (Lebesguen peitelause). — *Olkoon J jonokompakti joukko ja olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ sen avoin peite. Tällöin on $\lambda > 0$ siten, että jokaiselle $x \in J$ on $\alpha \in A$, jolle $B(x,\lambda) \subset U_\alpha$.*

Määritelmä 7.13. — Lebesguen peitelauseen antama luku λ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ *Lebesguen luku.*

Todistus. Oletetaan, että peitteellä $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ei ole Lebesguen lukua. Tällöin jokaisella $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on $x_n \in J$, jolle $B(x_n, \frac{1}{n})$ ei ole avoimen joukon U_α osajoukko millään $\alpha \in A$. Jonolla $(x_k)_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}$ on suppeneva osajono $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}-\{0\}}$, koska J on jonokompakti.

Olkoon $x_\infty = \lim_{j\to\infty} x_{k_j}$. Koska $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ on avoin peite, on $\alpha_\infty \in A$ ja $r_\infty > 0$, joille $x_\infty \in B(x_\infty, r_\infty) \subset U_{\alpha_\infty}$. Kolmioepäyhtälön nojalla $B(x_{k_j}, \frac{r_\infty}{2}) \subset U_{\alpha_\infty}$ suurilla j. Mutta riittävän suurilla j pätee $\frac{1}{k_j} < \frac{r_\infty}{2}$, joten $B(x_{k_j}, \frac{1}{k_j}) \subset U_{\alpha_\infty}$ suurilla j. Tämä on ristiriita. □

Lause 7.14. — *Metrisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti.*

Todistus. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $K \subset X$ kompakti. Olkoon $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono, jolle pätee $y_k \in K$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x,1))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite $\Big(B(x^1_1, 1), \dots B(x^1_{n_1}, 1)\Big)$. Joukko

$$I_1 = \{n \in \mathbb{N} : y_n \in B(x^1_{k_1}, 1)\}$$

on ääretön jollain $k_1 \in \{1, \dots, n_1\}$. Jonolla $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$, jolle $y_{1j} \in B(x^1_{k_1}, 1)$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.

Muodostamme osajonon jonolle $(y_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ samalla tavalla: Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, \frac{1}{2}))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite $\Big(B(x^2_1, \frac{1}{2}), \dots B(x^2_{n_2}, \frac{1}{2})\Big)$. Joukko

$$I_2 = \{n \in I_1 : y_{i_n} \in B(x^2_{k_2}, \frac{1}{2})\}$$

on ääretön jollain $k_2 \in \{1, \dots, n_2\}$. Jonolla $(y_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$, jolle $y_{2j} \in B(x^2_{k_2}, \frac{1}{2})$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.

Jatkamme induktiolla: Oletetaan, että on konstruoitu jono $(y_{Nk})_{k\in\mathbb{N}}$. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x, \frac{1}{N}))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite $\Big(B(x^N_1, \frac{1}{N}), \dots B(x^N_{n_N}, \frac{1}{N})\Big)$. Jonolla $(y_{Nk})_{k\in\mathbb{N}}$ on siis osajono $(y_{(N+1)j})_{j\in\mathbb{N}}$, jolle $y_{(N+1)j} \in B(x^N_{k_N}, \frac{1}{N})$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Diagonaalisesti muodostettu alkuperäisen jonon $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$osajono $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} = (y_{jj})_{j\in\mathbb{N}}$ on konstruktion perusteella Cauchyn jono, joten se suppenee Proposition 7.8 nojalla.

Oletetaan sitten, että K on jonokompakti. Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ joukon K avoin peite ja olkoon λ sen Lebesguen luku. Joukon K avoimella peitteellä $(B(x,\lambda))_{x\in K}$ on äärellinen osapeite, sillä muuten löydämme seuraavalla konstruktiolla jonon, jolla ei ole suppenevaa osajonoa: Valitaan $x_0 \in K$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ valitaan $x_{n+1} \in K - \bigcup_{j=0}^{n} B(x_j, \lambda)$. Näin saadulle jonolle pätee $d(x_r, x_s) > \lambda$ kaikilla $r \neq s$, joten sillä ei ole suppenevaa osajonoa.

On siis $N \in \mathbb{N}$ ja pisteet $x_1, x_2, \ldots, x_N$, joille $K \subset \bigcup_{n=0}^{N} B(x_n, \lambda)$. Oletuksen mukaan jokaisella $1 \leq n \leq N$ on $\alpha_n \in A$, jolle $B(x_n, \lambda) \subset U_{\alpha_n}$. Siis

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{N} B(x_n, \lambda) \subset \bigcup_{n=0}^{N} U_{\alpha_n}$$

joten $(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_N})$ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ äärellinen osapeite. □

Propositio 7.15. — *Olkoot X ja Y kompakteja metrisiä avaruuksia. Tällöin $X \times Y$ on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

7.2 Kompaktit joukot ja jatkuvat kuvaukset

Propositio 7.16. — *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Olkoon $f \colon X \to Y$ jatkuva. Olkoon $K \subset X$ kompakti. Olkoon $(U_j)_{j \in J}$ joukon $f(K)$ avoin peite. Tällöin $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$ on kompaktin joukon K avoin peite. Sillä on siis äärellinen osapeite $(f^{-1}(U_j))_{j \in J'}$. Siis $(U_j)_{j \in J}$ on joukon K äärellinen peite, joten $f(K)$ on kompakti. □

Kompaktius on topologinen ominaisuus:

Propositio 7.17. — *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h \colon X \to Y$ homeomorfismi. Tällöin X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 7.18. — *Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Jos kuvaus $f \colon K \to Y$ on jatkuva, niin se on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kokoelma $\left(f^{-1}(B(y, \frac{\varepsilon}{2}))\right)_{y \in Y}$ on avaruuden K avoin peite. Olkoon δ tämän peitteen Lebesguen luku. Olkoot $a, b \in K$ siten, että $d(a, b) < \delta$. Säteen δ määritelmän nojalla on $y \in Y$ siten, että $a, b \in B(a, \delta) \subset f^{-1}\Big(B(y, \frac{\varepsilon}{2})\Big)$. Siis

$$d(f(a), f(b)) \leq \ d(f(a), y) + d(y, f(b)) \leq \varepsilon\,,$$

joten f on tasaisesti jatkuva. □

Lause 7.19. — *Olkoon K kompakti metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Jos $f \colon K \to Y$ on jatkuva bijektio, niin f on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon $E \subset K$ suljettu. Proposition 7.5(1) nojalla E on kompakti. Proposition 7.12 nojalla $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ on kompakti ja siis Proposition 7.3 nojalla se on suljettu. Lauseen 3.6(2) nojalla f^{-1} on jatkuva. □

7.3 Kompaktit joukot euklidisessa avaruudessa

Lause 7.20 (Heinen ja Borelin lause). — *Euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Lauseen toisen suunnan väite seuraa Propositiosta 7.3. Lauseen 7.10 nojalla riittää osoittaa, että jokainen euklidisen avaruuden epätyhjä suljettu ja rajoitettu joukko $S \subset \mathbb{E}^n$ on jonokompakti.

Olkoon $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono, jolle $s_k \in S$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska S on rajoitettu, on $M > 0$, jolle pätee $S \subset I_0 = [-M, M]^n$. Jaetaan I_0 koordinaattihypertasoilla $\{x \in \mathbb{E}^n : x_j = 0\}$ 2^n yhtäsuureen M-sivuiseen suljettuun n-väliin $I_1^1, \dots I_1^{2^n}$, joiden keskinäiset leikkaukset sisältyvät koordinaattihypertasoihin. Olkoon I_1 sellainen näistä n-väleistä, jolle joukko $\{n \in \mathbb{N} : s_n \in I_1\}$ on ääretön. Olkoon $(s_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ jonon $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu väliin I_1 kuuluvista pisteistä.

Jaetaan sitten I_1 samalla tavalla 2^n yhtäsuureen $\frac{M}{2}$-sivuiseen n-väliin $I_2^1, \dots I_2^{2^n}$ koordinaattihypertasojen kanssa yhdensuuntaisilla hypertasoilla. Olkoon I_2 sellainen näistä n-väleistä, jolle joukko $\{n \in \mathbb{N} : s_n \in I_2\}$ on ääretön. Olkoon $(s_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ jonon $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ osajono, joka koostuu väliin I_2 kuuluvista pisteistä.

Induktiolla saadaan sisäkkäiset suljetut rajoitetut välit $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ ja osajonot $(s_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$, jotka koostuvat väliin I_k kuuluvista pisteistä jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Diagonaalisesti pisteistä $z_k = s_{kk}$ muodostettu jono $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on jonon $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ osajono, joka suppenee kohti Cantorin leikkauslauseen 6.9 antamaa pistettä $s_\infty \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \cap S$. □

Seuraus 7.21 (Bolzanon ja Weierstrassin lause jonoille). — *Euklidisen avaruuden rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Tämä väite tuli todistetuksi Heinen ja Borelin lauseen todistuksessa! □

Seuraus 7.22 (Bolzanon ja Weierstrassin lause joukoille). — *Euklidisen avaruuden äärettömällä rajoitetulla osajoukolla $A \subset \mathbb{E}^n$ on kasautumispiste. Jos A on suljettu, niin kasautumispiste on joukossa A.*

Todistus. Seuraa Bolzanon ja Weierstrassin lauseesta jonoille. Harjoitustehtävä. □

Lause 7.23 (Weierstrassin lause). — *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $K \subset X$ kompakti ja olkoon $f : X \to \mathbb{E}^1$ jatkuva. Tällöin on $x_0, y_o \in K$, joille pätee*

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

ja

$$f(y_0) = \min\{f(x) : x \in K\} .$$

Todistus. Proposition 7.12 nojalla kuvajoukko $f(K) \subset \mathbb{E}^1$ on kompakti. Heinen ja Borelin lauseen nojalla se on suljettu ja rajoitettu. Siis $\sup f(K), \inf f(K) \in f(K)$, joten $\sup f(K) = \max f(K)$ ja $\inf f(K) = \min f(K)$. □

Esimerkki 7.24. — Euklidisen avaruuden pallot ja pallopinnat ovat kompakteja Heinen ja Borelin lauseen nojalla. Lauseen 4.9 todistuksessa sovelsimme Weierstrassin lausetta kompaktilla pallopinnalla.

Seuraus 7.25 (Weierstrassin lause). — *Kompaktilla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.* □

Propositio 7.26. — *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $K \subset X$ kompakti. Tällöin jokaisella $x \in X$ on $x_K \in K$, jolle $d(x, K) = d(x, x_K)$.*

Todistus. Olkoon $x \in K$. Harjoitustehtävässä 3.10 osoitettiin, että kuvaus $d_{\{x\}} \colon K \to \mathbb{E}^1$, $d_{\{x\}}(k) = d(x, k)$, on jatkuva. Weierstrassin lauseen nojalla se saavuttaa miniminsä jossain pisteessä $x_K \in K$. Määritelmän nojalla $d(x, K) = d(x, x_K)$. □

Harjoitustehtäviä

7.1. Ovatko Ranskan rautatieavaruuden $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{SNCF}})$:n suljetut pallot kompakteja?

7.2. Todista Proposition 7.5 kohdat (1) ja (2).

7.3. Todista Proposition 7.5 kohdat (3) ja (4).

7.4. Osoita, että kompakti metrinen avaruus on täydellinen.

7.5. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h \colon X \to Y$ homeomorfismi. Osoita, että X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.

7.6. Todista Propositio 7.14 suoraan jatkuvuuden määritelmän avulla käyttämättä Lebesguen peitelausetta.

7.7. Olkoot X ja Y kompakteja metrisiä avaruuksia. Osoita, että $X \times Y$ on kompakti.

7.8. Todista Seuraus 7.18.

7.9. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon ja olkoon $K \subset X$ kompakti, $K \neq \emptyset$. Osoita, että on $a, b \in K$, joille pätee

$$d(a, b) = \mathrm{diam}(K)\,.$$

7.10. Anna esimerkki, joka osoittaa, että Proposition 7.22 väite ei päde, jos oletetaan, että K on vain suljettu.

7.11. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon

$$\mathscr{K}(X) = \{A \subset X : A \text{ on kompakti}\}\,.$$

Osoita, että lauseke

$$D(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subset B^\varepsilon \text{ ja } \ B \subset A^\varepsilon\}$$

määrää metriikan joukossa $\mathscr{K}(X)$.[2]

7.12. Miksi tehtävässä 7.11 rajoitutaan kompaktien osajoukkojen joukkoon?

Määritelmä 7.27. — Olkoot $I_0 = [0, 1] \subset \mathbb{E}^1$, $I_1^0 = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_1^1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Välit I_1^0 ja I_1^1 ovat siis ne kaksi suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun välistä I_0^0 poistetaan keskeltä

[2] Joukon E ε-paksunnos E^ε määriteltiin Harjoitustehtävän 2.11 yhteydessä.

avoin väli $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$. Olkoot

$$I_2^0=\Big[0,\frac{1}{3^2}\Big],\quad I_2^1=\Big[\frac{2}{3^2},\frac{1}{3}\Big],\quad I_2^2=\Big[\frac{2}{3},\frac{7}{3^2}\Big],\quad I_2^3=\Big[\frac{8}{3^2},1\Big]$$

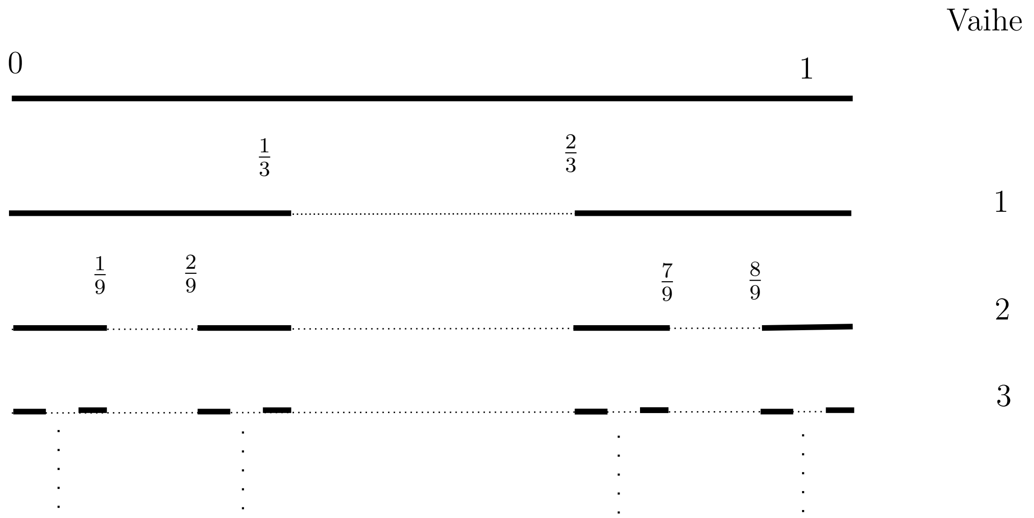
ne neljä suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun väleistä I_1^0 ja I_1^1 poistetaan keskeltä avoimet välit, joiden pituus on $\frac{1}{3^2}$. Jatketaan induktiolla: Vaiheessa n on 2^n suljettua väliä $I_n^0, I_n^1,\dots,I_n^{2^n-1}$. Jokaisen välin I_n^k pituus on 3^{-n}. Näistä väleistä muodostetaan vaiheen $n+1$ välit poistamalla jokaisesta keskeltä avoin väli, jonka pituus on $3^{-(n+1)}$.

Olkoon

$$K_n=\bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k\,.$$

Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko on

$$K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k\,.$$



Olkoon $a\in\Sigma$ ja olkoon

$$k_n(a)=\sum_{j=0}^{n}a_j\,2^j\in\mathbb{N}$$

kaikilla $n\in\mathbb{N}$. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon pisteen $x\in K$ *osoite* on $a=i(x)\in\Sigma$,[3] jolle pätee

$$\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{n+1}^{k_n(a)}\,.$$

7.13. Osoita, että Cantorin joukko on epätyhjä kompakti joukko.

7.14. Osoita, että osoitekuvaus i on homeomorfismi.

7.15. Osoita, että Cantorin joukko on ylinumeroituva.

[3] Σ on ennen Harjoitustehtävää 2.16 määritelty kahden symbolin jonoavaruus.

Luku 8

Yhtenäisyys

8.1 Yhtenäiset joukot

MÄÄRITELMÄ 8.1. — Metrinen avaruus X on *yhtenäinen*, jos ei ole avoimia epätyhjiä joukkoja U ja V, joille pätee $U \sqcup V = X$.

Metrisen avaruuden (X, d_X) osajoukko E on *yhtenäinen*, jos metrinen avaruus (E, d_X) on yhtenäinen.

PROPOSITIO 8.2. — *Metrisen avaruuden X osajoukko E on yhtenäinen, jos ja vain jos ei ole avaruuden X avoimia joukkoja U ja V, joille pätee $U \cap V \cap E = \emptyset$, $U \cap E \neq \emptyset$, $V \cap E \neq \emptyset$ ja $(U \cap E) \cup (V \cap E) = E$.*

Todistus. Seuraa Propositiosta 2.8. □

ESIMERKKI 8.3. — (0) Tyhjä joukko on yhtenäinen.

(1) Diskreetti metrinen avaruus on yhtenäinen, jos ja vain jos se koostuu yhdestä pisteestä.

(2) Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^1$ on epäyhtenäinen:

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Q} \cap]{-\infty}, \sqrt{2}[\right) \sqcup \left(\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, \infty[\right).$$

(3) Tason $\mathbb{E}^2$ osajoukko

$$\{x \in \mathbb{E}^2 : x_2 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{E}^2 : x_1 > 0,\ x_1 x_2 = 1\}$$

on epäyhtenäinen.

(4) Ultrametrinen avaruus[1] on yhtenäinen, jos ja vain jos se koostuu yhdestä pisteestä: Olkoon X ultrametrinen avaruus ja olkoot $x, y \in X$. Olkoon $r > 0$ siten, että $y \in X - B(x, r)$. Harjoitustehtävässä 2.15 osoitettiin, että $B(x, r)$ on avoin ja suljettu joukko. Siis $X - B(x, r)$ on avoin $X = B(x, r) \sqcup (X - B(x, r))$.

[1] Katso määritelmä Harjotustehtävän 2.13 yhteydessä.

Usein epäyhtenäisyys on helpompi osoittaa kuin yhtenäisyys. Luvussa 8.2 selvitämme avaruuden $\mathbb{E}^1$ yhtenäiset joukot ja tämän luvun ja luvun 8.3 tulosten avulla saamme lisää esimerkkejä.

Propositio 8.4. — *Olkoon X metrinen avaruus.*

(1) X on yhtenäinen, jos ja vain jos ei ole suljettuja epätyhjiä joukkoja $F \subset X$ ja $G \subset X$, joille pätee $F \sqcup G = X$.

(2) Olkoon $A \subset X$ yhtenäinen ja olkoot U ja V avaruuden X avoimia osajoukkoja, joille pätee $U \cap V = \emptyset$ ja $A \subset U \cup V$. Tällöin $A \subset U$ tai $A \subset V$.

Todistus. (1) Avaruus X on erillinen yhdiste avoimista joukoista U ja V, jos ja vain jos se on erillinen yhdiste suljetuista joukoista U ja V.

(2) Jos $A = \emptyset$, niin $A \subset U$ ja $A \subset V$. Jos $A \neq \emptyset$, niin $A \cap U \neq \emptyset$ tai $A \cap V \neq \emptyset$. Jos $A \cap U \neq \emptyset$ ja $A \cap V \neq \emptyset$, niin erityisesti $U \neq \emptyset$ ja $V \neq \emptyset$, joten A ei ole yhtenäinen. □

Seuraava epäyhtenäisyyden karakterisointi on joskus käyttökelpoinen:

Propositio 8.5. — *Olkoon X metrinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on epäyhtenäinen, jos ja vain jos on jatkuva surjektio $f\colon A \to \{0,1\}$.*

Todistus. Oletetaan, että A on epäyhtenäinen. On siis avoimet joukot $U, V \subset X$, joille $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ ja $A \subset U \sqcup V$. Määritellään funktio $f\colon A \to \{0,1\}$ asettamalla

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } a \in U \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}.$$

Funktio f on surjektio koska A leikkaa molempia joukkoja U ja V. Se on jatkuva koska $f^{-1}(0) = A \cap V$ ja $f^{-1}(1) = A \cap U$ ovat Proposition 2.8 nojalla avoimia joukkoja metrisessä avaruudessa A.

Oletetaan, että on jatkuva surjektio $f\colon A \to \{0,1\}$. Tällöin $f^{-1}(0)$ ja $f^{-1}(1)$ ovat avoimia epätyhjiä erillisiä joukkoja, ja $A = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. □

Seuraus 8.6. — *Olkoon X metrinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on yhtenäinen, jos ja vain jos jokainen jatkuva kokonaislukuarvoinen funktio $f\colon X \to \mathbb{E}^1$ on vakio.* □

Lemma 8.7. — *Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $A \neq \emptyset$ ja olkoot Y_α yhtenäisiä osajoukkoja kaikilla $\alpha \in A$ siten, että $\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset$. Tällöin $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoot U ja V avoimia erillisiä joukkoja, joille pätee $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset U \cup V$. Jokaisellle joukolle Y_α pätee joko $Y_\alpha \subset U$ tai $Y_\alpha \subset V$ Proposition 8.3 nojalla. Jos $Y_{\alpha_0} \subset U$ jollain $\alpha_0 \in A$, niin $Y_\alpha \subset U$ kaikilla α koska $Y_\alpha \cap Y_{\alpha_0} \neq \emptyset$ ja Y_α on yhtenäinen. Siis $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset U$. Koska tämä pätee kaikille erillisille avoimille joukoille U ja V, seuraa, että $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ on yhtenäinen. □

Propositio 8.8. — *Jos E on yhtenäinen ja $E \subset A \subset \overline{E}$, niin A on yhtenäinen. Erityisesti yhtenäisen joukon sulkeuma on yhtenäinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 8.9. — *Yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva. Oletetaan, että $f(X)$ ei ole yhtenäinen. Tällöin on avoimet joukot $U, V \subset Y$, joille $U \cap f(X) \neq \emptyset$, $V \cap f(X) \neq \emptyset$ ja $(U \cap f(X)) \sqcup (V \cap f(X)) = f(X)$.

Lauseen 3.6 nojalla joukot $f^{-1}(U)$ ja $f^{-1}(V)$ ovat avoimia. Koska $U \cap f(X) \neq \emptyset$ ja $V \cap f(X) \neq \emptyset$, niin $f^{-1}(U) \neq \emptyset \neq f^{-1}(V)$. Jos $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V)$, niin $f(x) \in U \cap V$, joten $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Jokaiselle $x \in X$ pätee $f(x) \in U \cap f(X) \subset U$ tai $f(x) \in V \cap f(X) \subset V$, joten $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Siis X ei ole yhtenäinen, mutta tämä on vastoin oletusta. □

Seuraus 8.10. — *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $h\colon X \to Y$ homeomorfismi. Tällöin X on yhtenäinen, jos ja vain jos Y on yhtenäinen.* □

8.2 Yhtenäiset joukot avaruudessa $\mathbb{E}^1$

Propositio 8.11. — *Jos $A \subset \mathbb{E}^1$ on yhtenäinen, niin $A = \emptyset$, $A = \mathbb{E}^1$ tai A on väli tai yhden pisteen joukko.*

Todistus. Oletetaan, että $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{E}^1$ ei ole väli eikä yhden pisteen joukko. Tällöin on $a_1, a_2 \in A$ ja $b \in \mathbb{E}^1 - A$, joille pätee $a_1 < b < a_2$. Tällöin

$$A = \Big(A \cap \,]{-\infty}, b[\Big) \sqcup \Big(A \cap \,]b, \infty[\Big)\,,$$

joten A ei ole yhtenäinen. □

Propositio 8.12. — *Euklidinen avaruus $\mathbb{E}^1$ ja avaruuden $\mathbb{E}^1$ välit ovat yhtenäisiä.*

Todistus. Olkoon $I \subset \mathbb{E}^1$ väli tai $\mathbb{E}^1$. Oletetaan, että se ei ole yhtenäinen. Tällöin on avoimet joukot A ja B siten, että $(A \cap I) \sqcup (B \cap I) = I$, $A \cap I \neq \emptyset$ ja $B \cap I \neq \emptyset$. Erityisesti on $a \in A \cap I$ ja $b \in B \cap I$. Voimme olettaa, että $a < b$.

Koska I on väli, $[a, b] \subset I$. Olkoon

$$c = \sup(A \cap [a, b])\,.$$

Koska A on avoin ja $b \notin A$, pätee $c \notin U$. Siis $c \in B$. Mutta B on avoin ja $c < b$, joten on $r > 0$ siten, että $]c - r, c + r[\, = B(c, r) \subset B \cap I$. Mutta tällöin $c - r$ on joukon $A \cap I$ yläraja, joten $\sup(A \cap I) \leq c - r < c = \sup(A \cap I)$, mikä on ristiriita. Siis I on yhtenäinen. □

Seuraus 8.13 (Bolzanon lause). — *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{E}^1$ jatkuva funktio, jolle $f(a)f(b) < 0$. Tällöin on $c \in \,]a, b[$, jolle pätee $f(c) = 0$.*

Todistus. Proposition 8.11 nojalla väli $[a, b]$ on yhtenäinen. Proposition 8.8 nojalla kuvajoukko $f([a, b])$ on yhtenäinen, joten se on väli tai piste. Oletuksen nojalla kuvajoukossa on enemmän kuin yksi piste, joten $f([a, b])$ on väli. Oletuksen nojalla $f(a) > 0$ ja $f(b) < 0$ tai päinvastoin, joten kuvajoukossa, joka on väli, on positiivisia ja negatiivisia lukuja. Siis $0 \in f([a, b])$. □

8.3 Polkuyhtenäisyys

MÄÄRITELMÄ 8.14. — Olkoon X metrinen avaruus. Jatkuva kuvaus kompaktilta väliltä $I \subset \mathbb{E}^1$ avaruuteen X on *polku.*

Polun $\gamma\colon I \to X$ *jälki* on $|\gamma| = \gamma(I)$.

Polku $\gamma\colon [a,b] \to X$ *yhdistää* pisteet $x_1 \in X$ ja $x_2 \in X$, jos $\{\gamma(a), \gamma(b)\} = \{x_1, x_2\}$. Polku $\gamma\colon I \to X$ *yhdistää* pisteet $x_1 \in E$ ja $x_2 \in E$ *joukossa* $E \subset X$, jos γ yhdistää pisteet x_1 ja x_2 ja $\gamma(I) \subset E$.

Joukko $E \subset X$ on *polkuyhtenäinen*, jos kaikille $x, y \in E$ on polku, joka yhdistää ne joukossa E.

PROPOSITIO 8.15. — *Jos E on polkuyhtenäinen, niin se on yhtenäinen.*

Todistus. Suljettu väli on Proposition 8.11 nojalla yhtenäinen. Polun kuva on yhtenäinen Proposition 8.8 nojalla. Olkoon $x_0 \in E$. Jokaisella $x \in E$ on polku γ_x, joka yhdistää pisteet x_0 ja x. Siis $E = \bigcup_{x\in E} |\gamma_x|$ ja $x_0 \in \bigcap_{x\in E} |\gamma_x|$, joten E on yhtenäinen Lemman 8.6 nojalla. □

PROPOSITIO 8.16. — *Polkuyhtenäisen joukon kuva jatkuvalla kuvauksella on polkuyhtenäinen.*

Todistus. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $F\colon X \to Y$ jatkuva. Olkoon $A \subset X$ polkuyhtenäinen. Olkoot $y, z \in F(A)$. Tällöin on pisteet $y_A, z_A \in A$, joille pätee $F(y_A) = y$ ja $F(z_A) = z$. Koska A on polkuyhtenäinen, on polku $\gamma\colon [0,1] \to A$, joka yhdistää pisteet y_A ja z_A joukossa A. Polku $F \circ \gamma$ yhdistää pisteet y ja z. □

ESIMERKKI 8.17. — $\mathbb{E}^n$ on polkuyhtenäinen kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$: Olkoot $A, B \in \mathbb{E}^n$. Olkoon $j\colon [0,1] \to \mathbb{E}^n$ kuvaus

$$j(t) = A + t\,(B - A)\,.$$

Tällöin j on selvästi jatkuva ja sille pätee $j(0) = A$ ja $j(1) = B$.

ESIMERKKI 8.18. — Pallon pinta $S(0,1) \subset \mathbb{E}^n$ on polkuyhtenäinen: Olkoot $A, B \in \mathbb{E}^n$, $\|A\| = \|B\| = 1$, $A \neq \pm B$ ja olkoon $j_{A,B}\colon \mathbb{R} \to S(0,1)$ kuvaus

$$j_{A,B}(t) = A\cos t + \frac{B - (A \,|\, B)A}{\sqrt{1 - (A \,|\, B)^2}}\sin t\,.$$

Tällöin $j_{A,B}$ on selvästi jatkuva ja sille pätee $j_{A,B}(0) = A$ ja $j_{A,B}(\arccos(A \,|\, B)) = B$, joten $j_{A,B}|_{[0,\arccos(A\,|\,B)]}$ on polku, joka yhdistää pisteet A ja B.

Kuvaus $j_{A,B}$ parametrisoi yksikäsitteisen isoympyrän, jolla pisteet A ja B ovat. Huomaa, että $j_{A,B}(\pi) = -A$, joten $j_{A,B}|_{[0,\pi]}$ on polku, joka yhdistää pisteet A ja $-A$.

SEURAUS 8.19. — *Avaruudet $\mathbb{E}^1$ ja $\mathbb{E}^n$ eivät ole homeomorfisia, jos $n \geq 2$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

PROPOSITIO 8.20. — *Kaikki euklidisen avaruuden avoimet yhtenäiset osajoukot ovat polkuyhtenäisiä.*

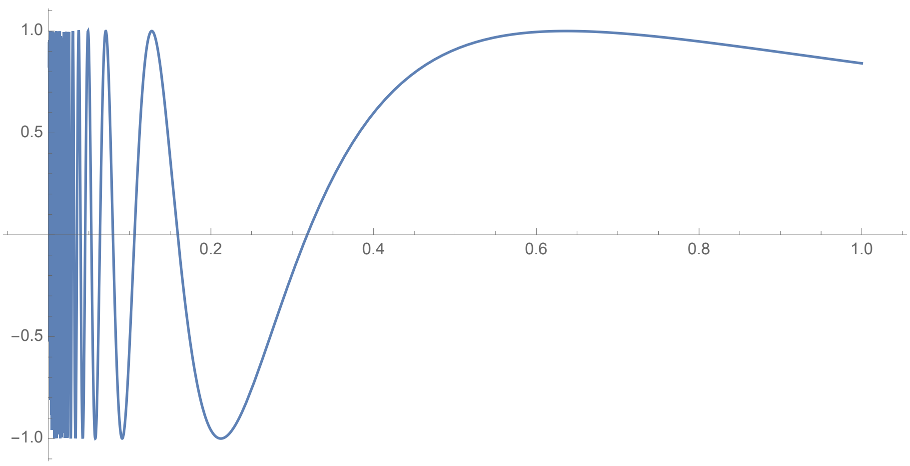
Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 8.21 (Topologin sinikäyrä). — Joukko

$$S_0 = \left\{ \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) : t > 0 \right\}$$

on polkuyhtenäinen koska se on polkuyhtenäisen joukon $]0, \infty[$ kuva jatkuvalla kuvauksella $g \colon]0, \infty[\to \mathbb{E}^2$, $g(t) = \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$. *Topologin sinikäyrä* on joukko

$$S = S_0 \cup \{0\}\,.$$



Kuva 81: Topologin sinikäyrä

Proposition 8.7 nojalla topologin sinikäyrä on yhtenäinen, koska

$$S_0 \subset S \subset \overline{S_0} = S_0 \cup \Big(\{0\} \times [-1, 1] \Big)\,.$$

Joukkoa $\overline{S_0}$ kutsutaan *suljetuksi topologin sinikäyräksi.* Harjoituksissa osoitetaan, että suljettu topologin sinikäyrä ei ole polkuyhtenäinen.

Harjoitustehtäviä

8.1. Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $E \subset X$ yhtenäinen joukko ja olkoon $x \in \partial E$. Osoita, että $E \cup \{x\}$ on yhtenäinen.

8.2. Osoita, että metrinen avaruus X on yhtenäinen, jos ja vain jos $\emptyset$ ja X ovat avaruuden X ainoat osajoukot, jotka ovat avoimia ja suljettuja.

8.3. Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $E \subset X$ yhtenäinen joukko ja olkoon $F \subset X$ joukko, jolle pätee $E \subset F \subset \overline{E}$. Osoita, että F on yhtenäinen.

8.4. Osoita, että maapallolla on vastakkaiset pisteet, joissa on sama lämpötila.[2]

[2] Ajatellaan, että lämpötila on jatkuva funktio $f \colon S(0, R) \to \mathbb{E}^1$. Tarkastele funktiota $g \colon S(0, R) \to \mathbb{E}^1$, $g(x) = f(x) - f(-x)$.

8.5. Osoita, että $\mathbb{E}^n - \{0\}$ on polkuyhtenäinen, jos $n \geq 2$.

8.6. Osoita, että avaruudet $\mathbb{E}^1$ ja $\mathbb{E}^n$ eivät ole homeomorfisia, jos $n \geq 2$.

8.7. Osoita, että kaikki euklidisen avaruuden avoimet yhtenäiset osajoukot ovat polkuyhtenäisiä.[3]

8.8. Osoita, että suljettu topologin sinikäyrä ei ole polkuyhtenäinen.[4]

[3] Valitse joukosta jokin piste ja tarkastele niiden pisteiden joukkoa, jotka voidaan yhdistää sen kanssa ja niiden pisteiden joukkoa, joita ei.

[4] Kysymystä voi lähestyä esimerkiksi näin: Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to S$ polku, jolle pätee $\gamma(0) = 0$ ja $\gamma(1) \neq 0$. Olkoon $p_1\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ projektio ensimmäiselle koordinaatille. Kuvaus $p_1 \circ \gamma$ on polku. Voidaan olettaa, että $0 = \max\{t \in [0,1] : p_1 \circ \gamma(t) = 0\}$. Mitä voit päätellä välien $[0, \delta]$ kuvajoukoista?

Osa II

Topologia

Luku 9

Topologiset avaruudet

Topologian kurssin ensimmäisessä luvussa määritellään topologiset avaruudet ja tutustutaan joihinkin esimerkkeihin. Määrittelemme topologisten avaruuksien tilanteessa monia metrisistä avaruuksista tuttuja käsitteitä ja niiden yhteydessä myös muutamia uusia hyödyllisiä käsitteitä kuten Hausdorffin avaruudet.

9.1 Topologia, avoimet ja suljetut joukot

Määritelmä 9.1. — Olkoon $X \neq \emptyset$. Joukon X potenssijoukon[1] osajoukko τ on joukon X *topologia*, jos sillä on seuraavat kolme ominaisuutta

(1) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$.

(2) Jos $U_1, U_2, \dots, U_N \in \tau$, niin $\bigcap_{k=1}^{N} U_k \in \tau$.

(3) Jos $A \neq \emptyset$ ja $U_\alpha \in \tau$ kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Pari (X, τ) on *topologinen avaruus*. Joukon τ alkiot ovat topologisen avaruuden (X, τ) *avoimia joukkoja*. Joukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos sen komplementti on avoin.

Jos $x \in U \in \tau$, niin U on pisteen x *(avoin) ympäristö*.

Esimerkki 9.2. — Koko avaruus X ja tyhjä joukko $\emptyset$ ovat avoimia ja suljettuja joukkoja topologisessa avaruudessa X.

Esimerkki 9.3. — Luvussa 4.1 määritelty metrisen avaruuden (X, d) topologia

$$\tau(X, d) = \{U \subset X : U \text{ on avoin}\}$$

on Proposition 2.6 nojalla topologia. Tätä topologiaa sanotaan *metriseksi topologiaksi*.

Määritelmä 9.4. — Topologinen avaruus. (X, τ) on *metristyvä*, jos joukolla X on metriikka d siten, että $\tau = \tau(X, d)$.

[1] Määritelty Harjoitustehtävässä 1.5.

Metrisessä avaruudessa on jokin kiinnitetty metriikka. Metristyvän avaruuden topologia on jonkin metriikan määräämä mutta välttämättä ei ole selvää, onko jokin mahdollisista metriikoista erityisen merkittävä.

MÄÄRITELMÄ 9.5. — Epätyhjän joukon $X \neq \emptyset$ *minitopologia* eli *karkea topologia* on $\{\emptyset, X\}$ ja sen *diskreetti topologia* on $\mathscr{P}(X)$.[2] Topologinen avaruus $(X, \{\emptyset, X\})$ on *karkea topologinen avaruus* ja to $(X, \mathscr{P}(X))$ on *diskreetti topologinen avaruus.*

ESIMERKKI 9.6. — Diskreetissä topologisessa avaruudessa kaikki osajoukot ovat avoimia ja suljettuja. Diskreetti topologia on diskreetin metrisen avaruuden (X, δ) metrinen topologia.

Huomaamme luvussa 9.3, että karkea topologinen avaruus ei ole metristyvä, jos siinä on enemmän kuin yksi piste.

ESIMERKKI 9.7. — Kokoelma $\big\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\big\}$ on topologia joukossa $\{0,1\}$. Topologinen avaruus $\Big(\{0,1\}, \big\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\big\}\Big)$ on *Sierpínskin topologinen avaruus.* Tässä topologisessa avaruudessa yhden pisteen joukko $\{1\}$ on suljettu joukko, joka ei ole avoin ja yhden pisteen joukko $\{0\}$ on avoin joukko, joka ei ole suljettu.

ESIMERKKI 9.8. — Kolmen alkion joukolla $X = \{1,2,3\}$ on 29 topologiaa. Karkean topologian $\{\emptyset, X\}$ ja diskreetin topologian $\mathscr{P}(X)$ lisäksi esimerkiksi $\{\emptyset, \{1\}, X\}$ on topologia. Kaikki topologiat ovat joukon $\mathscr{P}(X)$ osajoukkoja. Joukossa $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ on 256 alkioita, joista siis vain pieni osa on topologioita.

PROPOSITIO 9.9. — *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$ epätyhjä osajoukko. Kokoelma*

$$\tau|_E = \{U \cap E : U \in \tau\}$$

on joukon E topologia.

Todistus. Huomataan ensin, että $\emptyset = E \cap \emptyset \in \tau|_E$ koska $\emptyset \in \tau$ ja $E = E \cap X \in \tau|_E$ koska $X \in \tau$. Olkoot sitten $U_1, \dots U_n \in \tau|_E$. Tällöin on $\widetilde{U}_j \in \tau$, joille $U_j = E \cap \widetilde{U}_j$ kaikille $1 \le j \le N$. Nyt

$$\bigcap_{j=1}^{n} U_j = \bigcap_{j=1}^{n} (\widetilde{U}_j \cap E) = (\bigcap_{j=1}^{n} \widetilde{U}_j) \cap E \in \tau|_E\,,$$

koska $\bigcap_{j=1}^n \widetilde{U}_j \in \tau$. Vastaavasti, jos $U_\alpha \in \tau|_E$ kaikilla $\alpha \in A$, niin

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (\widetilde{U}_\alpha \cap E) = (\bigcup_{\alpha\in A} \widetilde{U}_\alpha) \cap E \in \tau|_E\,,$$

koska $\bigcup_{\alpha\in A} \widetilde{U}_\alpha \in \tau$ □

MÄÄRITELMÄ 9.10. — Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$ epätyhjä osajoukko. Joukon E topologia $\tau|_E$ on topologisen avaruuden X määräämä joukon E *relatiivitopologia* eli *indusoitu topologia.*

ESIMERKKI 9.11. — Topologian ja relatiivitopologian määritelmistä seuraa suoraan, että jos $U \in \tau(X)$, niin $\tau|_U \subset \tau(X)$. Toisaalta esimerkiksi joukko $]0,1]$ on avoin joukkoon avaruuden $\mathbb{E}^1$ määräämässä joukon $]0,1]$ relatiivitopologiassa mutta se ei ole avaruuden $\mathbb{E}^1$ avoin joukko.

[2]Nämä ovat selvästi topologioita.

Propositio 9.12. — *Olkoon X topologinen avaruus. Olkoon B indeksijoukko ja olkoot $F_\beta \subset X$ suljettuja osajoukkoja kaikilla $\beta \in B$. Tällöin*

(1) $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

(2) jos B on äärellinen, niin $\bigcup_{\beta \in B} F_\beta$ on suljettu.

Todistus. Kuten Propositio 2.6. Harjoitustehtävä. □

9.2 Sisus, reuna ja sulkeuma

Määritelmä 9.13. — Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Olkoon $A \subset X$. Piste $a \in A$ on joukon A *sisäpiste*, jos on jokin pisteen a avoin ympäristo V, jolle $V \subset A$. Joukon A komplementin sisäpiste on joukon A *ulkopiste*. Jos $x \in X$ ei ole joukon A ulkopiste eikä sisäpiste, niin se on joukon A *reunapiste*. Joukon A

- sisäpisteiden joukko $(\operatorname{int} A)_\tau = \operatorname{int} A$ on joukon A *sisus*.
- ulkopisteiden joukkoa merkitään $(\operatorname{ext} A)_\tau = \operatorname{ext} A$.
- reunapisteiden joukko on $(\partial A)_\tau = \partial A$.

Propositio 9.14. — *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Joukon A sisus ja ulkopisteiden joukko ovat avoimia ja sen reuna on suljettu. Lisäksi pätee*

$$X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A \,. \tag{9.1}$$

Todistus. Kuten Propositio 2.9. Harjoitustehtävä.

□

Lemma 9.15. — *Olkoon X topologinen avaruus. Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ reunapiste, jos ja vain jos jokaiselle pisteen x ympäristölle V pätee $V \cap A \neq \emptyset$ ja $V \cap (X - A) \neq \emptyset$.*

Todistus. Tämä on selvää määritelmistä. □

Määritelmä 9.16. — Olkoon X topologinen avaruus. Osajoukon $E \subset X$ *sulkeuma* on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon E:

$$(\overline{E})_\tau = \overline{E} = \bigcap_{\substack{F \supset E \\ F \text{ suljettu}}} F \,.$$

Esimerkki 9.17. — (1) Olkoon X ääretön joukko. Kokoelma

$$\tau_{\mathrm{cof}} = \{U \subset X : \#(X - U) < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

on joukon $X \neq \emptyset$ *kofiniitti topologia* eli *äärellisen komplementin topologia*.[3] Tässä topologiassa avaruuden X suljetut joukot ovat tyhjän joukon ja koko avaruuden lisäksi sen äärelliset osajoukot. Erityisesti siis jokaisen äärettömän osajoukon sulkeuma on koko avaruus.

[3]Katso Harjoitustehtävä 9.4.

(2) Olkoon X ylinumeroituva joukko. Kokoelma

$$\{U \subset X : X - U \text{ on äärellinen tai numeroituva}\} \cup \{\emptyset\}$$

on joukon $X \neq \emptyset$ *numeroituvan komplementin topologia.* Tässä topologiassa avaruuden X suljetut joukot ovat tyhjän joukon ja koko avaruuden lisäksi sen äärelliset ja numeroituvat osajoukot. Erityisesti siis jokaisen ylinumeroituvan osajoukon sulkeuma on koko avaruus.

PROPOSITIO 9.18. — *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Tällöin*

(1) E on avoin, jos ja vain jos $E = \operatorname{int} E$.

(2) Joukko E on suljettu, jos ja vain jos $E = \overline{E}$.

(3) $\overline{E} = E \cup \partial E = \operatorname{int} E \cup \partial E$.

(4) $\partial(X - E) = \partial E$.

(5) $\partial E = \overline{E} \cap \overline{X - E}$

(6) Jos $F \subset E$, niin $\operatorname{int} F \subset \operatorname{int} E$ ja $\overline{F} \subset \overline{E}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

MÄÄRITELMÄ 9.19. — Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ *kasautumispiste*, jos $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ jokaisella pisteen x ympäristöllä V. Jos pisteellä $\{x\}$ on ympäristö V siten, että $V \cap A = \{x\}$, niin x on joukon A *eristetty piste* tai *erakkopiste*. Joukko $E \subset X$ on *diskreetti*, jos kaikki pisteet $x \in E$ ovat erakkopisteitä.

ESIMERKKI 9.20. — (1) Kaikkien diskreettien topologisten avaruuksien kaikki pisteet ovat eristettyjä. Ne ovat siis diskreettejä joukkoja yllä määritellyssä mielessä.

(2) Olkoon $p \in X$ ja varustetaan X *erityispistetopologialla*

$$\tau_p = \{E \in \mathscr{P}(X) : p \in E\} \cup \{\emptyset\},$$

jonka *erityispiste* on p. Tällöin p on eristetty piste koska $\{p\} \in \tau_p$. Jos taas $x \in X - \{p\}$ ja $U \in \tau_p$ on pisteen x ympäristö, niin $p \in U$, joten x ei ole eristetty.

PROPOSITIO 9.21. — *Joukko E on suljettu,*

(1) jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.

(2) jos ja vain jos se sisältää reunansa.

Todistus. Ensimmäinen kohta todistetaan kuten Propositio 2.13 ja toinen seuraa Propositiosta 9.12. Harjoitustehtävä. □

9.3 Hausdorffin avaruudet

Määritelmä 9.22. — Topologinen avaruus (X, τ) on *Hausdorffin avaruus*, jos kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$, on erilliset avoimet ympäristöt $U \ni x$ ja $V \ni y$. Tällöin τ on *Hausdorffin topologia* joukossa X.

Propositio 9.23. — *Metrinen avaruus on Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoot $x, y \in X$, $x \neq y$. Tällöin $d(x, y) > 0$. Kolmioepäyhtälön avulla nahdään helposti, että $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ ja $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$ ovat pisteiden x ja y erilliset ympäristöt. □

Seuraus 9.24. — *Metristyvä avaruus on Hausdorffin avaruus.* □

Esimerkki 9.25. — Jos X on ääretön joukko, niin (X, τ_{cof}) ei ole Hausdorffin avaruus: Koska avoimen epätyhjän joukon komplementti on äärellinen, kahden avoimen epätyhjän joukon leikkaus ei ole tyhjä.

Seurauksen 9.16 nojalla karkea metrinen avaruus ei ole metristyvä, jos siinä on enemmän kuin yksi piste.

Propositio 9.26. — *Yhden pisteen muodostamat joukot ovat suljettuja Hausdorffin avaruudessa.*

Todistus. Olkoon X Hausdorffin avaruus ja olkoon $x \in X$. Jokaisella $y \in X - \{x\}$ on pisteen y avoin ympäristö U_y siten, että $x \notin U_y$. Siis

$$X - \{x\} = \bigcup_{y \in X - \{x\}} \{y\} = \bigcup_{y \in X - \{x\}} U_y$$

on avoin. □

Esimerkki 9.27. — Esimerkissä 9.4 tarkasteltu Sierpínskin avaruus ei ole Hausdorffin avaruus koska pisteen 1 ainoa ympäristö on koko avaruus $X = \{0, 1\}$.

Esimerkki 9.28. — Olkoon 0^* piste, joka ei ole reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ alkio. Määritellään topologia τ joukossa $X = \mathbb{R} \cup \{0^*\}$ asettamalla

$$\tau = \tau(\mathbb{E}^1) \cup \Big\{\{0^*\} \cup (V - \{0\}) : V \in \tau(\mathbb{E}^1),\ 0 \in V\Big\} \cup \Big\{\{0^*\} \cup V : V \in \tau(\mathbb{E}^1),\ 0 \in V\Big\}.$$

Pisteillä 0 ja 0^* ei ole erillisiä ympäristöjä topologisessa avaruudessa (X, τ), joten se ei ole Hausdorffin avaruus. Kaikki avaruuden (X, τ) yhden pisteen joukot ovat suljettuja. Siis Proposition 9.18 käänteinen väite ei päde.

Propositio 9.29. — *Topologinen avaruus (X, τ) on Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos jokaiselle $x \in X$ pätee*

$$\{x\} = \bigcap_{x \in V \in \tau} \overline{V}.$$

Todistus. Olkoon X Hausdorffin avaruus ja olkoot $a, b \in X$, $a \neq b$. Tällöin pisteillä a ja b on erilliset ympäristöt $U_a \ni a$ ja $U_b \ni b$. Nyt $\overline{U}_a \subset X - U_b \subset X - \{b\}$, joten $b \notin \bigcap_{a \in V \in \tau} \overline{V}$.

Väitteen toinen suunta tehdään harjoituksissa. □

9.4 Jatkuvat kuvaukset

Määrittelemme topologisten avaruuksien välisten kuvausten jatkuvuuden siten, että metristen avaruuksien tapauksessa määritelmä on sama kuin luvussa 3.

Määritelmä 9.30. — Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia ja olkoon $x_0 \in X$. Kuvaus $f \colon X \to Y$ on *jatkuva pisteessä* x_0, jos jokaiselle pisteen $f(x_0)$ ympäristölle $V \ni f(x_0)$ on pisteen x_0 ympäristö $U \ni x_0$ siten, että $f(U) \subset V$. Kuvaus f on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

Propositio 9.31. — *Metristen avaruuksien välinen kuvaus $f \colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on jatkuva, jos ja vain jos $f \colon (X, \tau(X, d_X)) \to (Y, \tau(Y, d_Y))$ on jatkuva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 9.32. — *Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia.*

(1) Kuvaus $f \colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset Y$.

(2) Kuvaus $f \colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

Todistus. Harjoitustehtävä, kuten Lause 3.6. □

Esimerkki 9.33. — Olkoon X diskreetti topologinen avaruus ja olkoon Y karkea topologinen avaruus. Olkoon Z topologinen avaruus. Lauseen 9.23 nojalla kaikki funktiot $f \colon X \to Z$ ja $g \colon Z \to Y$ ovat jatkuvia.

Lemma 9.34. — *Olkoot X_1, X_2, X_3 topologisia avaruuksia. Jos $F \colon X_1 \to X_2$ ja $G \colon X_2 \to X_3$ ovat jatkuvia kuvauksia, niin $G \circ F$ on jatkuva kuvaus.*

Todistus. Olkoon $W \subset X_3$ avoin joukko. Koska G on jatkuva, $G^{-1}(W) \subset X_2$ on avoin Lauseen 9.23 nojalla. Koska F on jatkuva, $(G \circ F)^{-1}(W) = F^{-1}(G^{-1}(W)) \subset X_2$ on avoin Lauseen 9.23 nojalla. Siis $G \circ F$ on jatkuva Lauseen 9.23 nojalla. □

Määritelmä 9.35. — Olkoot X_1 ja X_2 topologisia avaruuksia. Bijektio $F \colon X_1 \to X_2$ on *homeomorfismi*, jos F on jatkuva ja F^{-1} on jatkuva.

Propositio 9.36. — *Homeomorfismien yhdistetty kuvaus on homeomorfismi. Homeomorfismin käänteiskuvaus on homeomorfismi. Homeomorfismi kuvaa avoimet joukot avoimiksi ja suljetut joukot suljetuiksi.*

Todistus. Kuten metrisille avaruuksille Luvussa 4.1. □

9.5 Jonot

Topologisen avaruuden suppenemiskäsite määritellään niin, että se antaa metrisen avaruuden metrisessä topologiassa saman käsitteen kuin luvussa 5 määritelty suppeneminen metrisessä avaruudessa.

Määritelmä 9.37. — Topologisen avaruuden (X,τ) jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä $x_0 \in X$, jos jokaisella pisteen x_0 avoimella ympäristöllä $U \in \tau$ on $N_U \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in U$ kaikilla $k \geq N_U$. Jos jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, käytetään merkintää $x_n \to x$, kun $x \to \infty$.

Propositio 9.38. — *Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Jono $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $a \in X$ metrisessä avaruudessa (X,d), jos ja vain jos se suppenee kohti pistettä $a \in X$ topologisessa avaruudessa $(X,\tau(X,d))$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 9.39. — (1) Esimerkissä 9.4 tarkastellussa Sierpínskin avaruudessa vakiojono 0 suppenee kohti pisteitä 0 ja 1. Topologisen avaruuden jono voi siis supeta kohti useampaa kin yhtä raja-arvoa. Sen sijaan vakiojono 1 suppenee kohti pistettä 1 mutta ei kohti pistettä 0.

(2) Karkeassa topologisessa avaruudessa mikä tahansa jono suppenee kohti jokaista pistettä.

Propositio 9.40. — *Hausdorffin avaruudessa jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 9.41. — *Jatkuva kuvaus kuvaa suppenevat jonot suppeneviksi jonoiksi.*

Todistus. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ jono, joka suppenee kohti pistettä x avaruudessa X. Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva.

Olkoon U pisteen $f(x)$ ympäristö. Jatkuvuuden nojalla on pisteen x ympäristö V siten, että $f(V) \subset U$. Raja-arvon määritelmän nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in V$ kaikilla $k \geq N$. Siis kaikilla $k \geq N$ pätee $f(x_k) \in f(V) \subset U$, joten $f(x_k) \to f(x)$, kun $k \to \infty$. □

Osa metrisen avaruuden osajoukon sulkeuman karakterisoinnista jonojen avulla[4] yleistyy suoraviivaisesti topologisiin avaruuksiin.

Propositio 9.42. — *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $E \subset X$. Jos $x_k \in E$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $x_k \to x$, kun $k \to \infty$, niin $x \in \overline{E}$.*

Todistus. Jos x on joukon E ulkopiste, sillä on ympäristö, joka ei leikkaa joukkoa E. Siis x ei ole joukon E minkään jonon raja-arvo. □

Seuraava esimerkki osoittaa, että Propositiota 5.4 ei voi yleistää kaikille topologisille avaruuksille:

Esimerkki 9.43. — Varustetaan $\mathbb{R}$ Esimerkissä 9.11(2) tarkastellulla numeroituvan komplementin topologialla. Esimerkissä 9.11(2) osoitimme, että joukon $]0,1[$ sulkeuma on $\mathbb{R}$.

Osoitetaan nyt, että mikään joukon $\mathbb{R} -]0,1[$ alkio ei ole minkään sellaisen jonon raja-arvo, joka koostuu joukon $]0,1[$ pisteistä. Olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono joukon $]0,1[$ pisteitä. Joukko $U = \mathbb{R} - \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ on minkä tahansa pisteen $u \in U$ ympäristö ja siis minkä tahansa joukkoon $]0,1[$ kuuluvan pisteen ympäristö, jossa ei ole yhtään jonon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pistettä. Siis mikään joukon $]0,1[$ jonoista ei suppene mihinkään joukon $\mathbb{R} -]0,1[$ pisteeseen.

[4]Propositio 5.4

Harjoitustehtäviä

9.1. Anna esimerkkejä joukon $\{1, 2, 3\}$ topologioista, joissa on 4, 5 ja 6 avointa joukkoa.

9.2. Olkoot τ_j, $j \in J$, joukon $X \neq \emptyset$ topologioita. Osoita, että $\tau = \bigcap_{j\in J} \tau_j$ on joukon X topologia.

9.3. Olkoon X joukko ja olkoon $p \in X$. Osoita, erityispistetopologia τ_p on topologia. Onko se Hausdorffin topologia?

9.4. Olkoon X ääretön joukko. Osoita, että äärellisen komplementin topologia on joukon X topologia. Onko se Hausdorffin topologia?

9.5. Todista Propositio 9.8.

9.6. Osoita, että kaikki äärelliset Hausdorffin avaruudet ovat diskreettejä topologisia avaruuksia.

9.7. Olkoon (X, τ) Hausdorffin avaruus ja olkoon $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Osoita, että $(E, \tau|_E)$ on Hausdorffin topologia.

9.8. Olkoon X topologinen avaruus, jonka kaikki yhden pisteen joukot ovat suljettuja. Osoita, että jokaiselle $x \in X$ pätee

$$\{x\} = \bigcap_{x\in V\in\tau} V\,.$$

9.9. Olkoon X topologinen avaruus, jonka jokaiselle pisteelle $x \in X$ pätee

$$\{x\} = \bigcap_{x\in V\in\tau} V\,.$$

Osoita, että kaikki avaruuden X yhden pisteen joukot ovat suljettuja.

9.10. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Oletetaan, että jokaiselle $x \in X$ pätee

$$\{x\} = \bigcap_{x\in V\in\tau} \overline{V}\,.$$

Osoita, että X on Hausdorffin avaruus.

9.11. Todista Propositio 9.22.

9.12. Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Osoita, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(U)$ on avoin jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset Y$.

9.13. Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Osoita, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

9.14. Olkoon X topologinen avaruus, jossa on erityispistetopologia, jonka erityispiste on $p \in X$. Olkoon $x \in X$ ja määritellään kuvaus $\gamma_x\colon [0, 1] \to X$ asettamalla $\gamma_x(1) = x$ ja $\gamma(t) = p$, kun $t \in [0, 1[$. Osoita, että γ_x on jatkuva.

9.15. Osoita, että Hausdorffin avaruudessa jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.

Luku 10

Topologisten avaruuksien luokittelua

Tässä luvussa tutustumme topologioiden vertailuun ja eräisiin hyödyllisiin topologisten avaruuksien luokkiin. Luvun lopuksi tarkastelemme avointen tiheiden joukkojen leikkauksia ja todistamme version Bairen lauseesta.

10.1 Topologioiden vertailua

MÄÄRITELMÄ 10.1. — Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Jos $\tau_1 \subset \tau_2$, niin τ_1 on *karkeampi* topologia kuin τ_2 ja τ_2 on *hienompi* topologia kuin τ_1.

ESIMERKKI 10.2. — (1) Joukon X diskreetti topologia on hienoin topologia joukossa X.

(2) Joukon X karkea topologia on karkein topologia joukossa X.

(3) Joukon kaikkia topologioita ei voi yleensä verrata toisiinsa. Esimerkiksi joukon $\{0, 1\}$ topologioista $\big\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\big\}$ ja $\big\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\big\}$ eivät ole toistensa osajoukkoja.

PROPOSITIO 10.3. — *Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Olkoon τ_1 hienompi kuin τ_2. Tällöin*[1]

(1) $(\operatorname{int} A)_{\tau_2} \subset (\operatorname{int} A)_{\tau_1}$

(2) $(\overline{A})_{\tau_1} \subset (\overline{A})_{\tau_2}$

Todistus. (1) Olkoon $x \in (\operatorname{int} A)_{\tau_2}$. Tällöin on pisteen x ympäristö $U \in \tau_2$, jolle pätee $x \in U \subset A$. Koska $\tau_2 \subset \tau_1$, pätee siis $U \in \tau_1$, joten $x \in (\operatorname{int} A)_{\tau_1}$.

(2) Harjoitustehtävä. □

PROPOSITIO 10.4. — *Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Olkoon τ_1 hienompi kuin τ_2. Tällöin, jos (X, τ_2) on Hausdorffin avaruus, niin (X, τ_1) on Hausdorffin avaruus.*

[1] Tässä käytetään luvussa 9.2 esiteltyjä merkintöjä.

Todistus. Olkoot $x, y \in X$, $x \neq y$. Koska (X, τ_2) on Hausdorffin avaruus pisteillä x ja y on erilliset avoimet ympäristöt $U, V \in \tau_2$. Oletuksen mukaan $U, V \in \tau_1$, joten ne ovat pisteiden x ja y erilliset ympäristöt avaruudessa (X, τ_1). Siis (X, τ_1) on Hausdorffin avaruus. □

Esimerkki 10.5. — Lauseke

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

määrää normin avaruudessa $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1)$. Olkoon d_1 normin $\|\cdot\|_1$ määräämä metriikka ja olkoon d_∞ normin $\|\cdot\|_\infty$ määräämä metriikka avaruudessa $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1)$.[2]

Lasku osoittaa, että

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\, dt = \|f\|_\infty$$

kaikille $f \in \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1)$. Siis $B_{d_\infty}(0, r) \subset B_{d_1}(0, r)$ ja normiavaruuden ominaisuuksien nojalla $B_{d_\infty}(g, r) \subset B_{d_1}(g, r)$ kaikilla $g \in \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1)$ ja $r > 0$. Tämän havainnon avulla osoitamme harjoitustehtävässä 10.2, että

$$\tau(\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1), d_1) \subset \tau(\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1), d_\infty)\,.$$

Harjoitustehtävässä 5.12 osoitettiin, että normien $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ määräämät topologiat eivät ole samat, joten topologia $\tau(\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1), d_\infty)$ on aidosti hienompi kuin $\tau(\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1), d_1)$.

Propositio 10.6. — *Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Identtinen kuvaus*

$$\mathrm{id}\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$$

on jatkuva, jos ja vain jos τ_1 on hienompi kuin τ_2.

Todistus. Avoimen joukon $U \in \tau_2$ alkukuva identtisessä kuvauksessa on avoin, jos ja vain jos $U \in \tau_1$. □

10.2 N_1-avaruudet

Määritelmä 10.7. — Olkoon X topologinen avaruus. Kokoelma $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ pisteen $x \in X$ ympäristöjä on *ympäristökanta* pisteessä x, jos jokaisella pisteen x ympäristöllä U on $\alpha \in A$, jolle $V_\alpha \subset U$. Avaruus X on *N_1-avaruus*, jos sen jokaisella pisteellä on numeroituva ympäristökanta.

Propositio 10.8. — *Metristyvä topologinen avaruus on N_1-avaruus.*

Todistus. Metrisessä avaruudessa kokoelma $\left(B(x, \frac{1}{n})\right)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on numeroituva ympäristökanta pisteessä x. □

Lemma 10.9. — *Jos X on N_1-avaruus, niin jokaisella pisteellä $x \in X$ on numeroituva ympäristökanta $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$, jolle $V_{k+1} \subset V_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.*

[2]Katso luvut 1.2 ja 6.1

Todistus. Olkoon $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ympäristökanta pisteessä $x \in X$. Määritellään $V_k = \bigcap_{j=0}^{k} U_j$. Tällöin joukot V_k ovat avoimia ja pätee $V_{k+1} \subset V_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi $V_k \subset U_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on haluttu ympäristökanta. □

Propositio 10.10. — *Olkoon X topologinen avaruus, olkoon $x \in X$ ja olkoon $(V_\alpha)_{\alpha\in J}$ ympäristökanta pisteessä x. Jono $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, jos ja vain jos jokaisella V_α on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in V_\alpha$ kaikilla $k \geq N$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 10.11. — *Olkoon X N_1-avaruus. Olkoon $E \subset X$. Tällöin $\overline{E}$ koostuu kaikista joukon E alkioista muodostettujen avaruuden X suppenevien jonojen raja-arvoista.*

Todistus. Proposition 9.31 nojalla riittää osoittaa, että jokainen reunapiste on jonkin joukon E alkioista koostuvan jonon raja-arvo. Olkoon $x_0 \in \partial E$. Lemman 10.7 nojalla pisteellä x_0 on numeroituva sisäkkäinen ympäristökanta $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Valitaan jokaisella $k \in \mathbb{N}$ alkio $e_k \in V_k \cap E \neq \emptyset$. Tällöin jono $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee pisteeseen x_0 Proposition 10.8 nojalla. □

Esimerkki 10.12. — (1) Esimerkin 9.32 ja Proposition 10.9 nojalla nähdään, että numeroituvan komplementin topologialla varustettu ylinumeroituva joukko ei ole N_1-avaruus.

(2) On topologisia avaruuksia, jotka eivät ole N_1-avaruuksia mutta joissa jokaisen osajoukon E sulkeuma koostuu joukon E alkioista muodostettujen jonojen raja-arvoista. Esimerkissä 12.13(2) esiteltävä ääretön ympyräkimppu on esimerkki tällaisesta avaruudesta.

10.3 Tiheät joukot ja separoituvuus

Määritelmä 10.13. — Topologisen avaruuden X osajoukko E on *tiheä*, jos $\overline{E} = X$. Topologinen avaruus X on *separoituva*, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Lemma 10.14. — *Topologisen avaruuden X osajoukko Q on tiheä, jos ja vain jos $Q \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $V \neq \emptyset$.*

Todistus. Oletetaan, että $Q \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $V \neq \emptyset$. Jos olisi $\overline{Q} \neq X$, niin $X - \overline{Q}$ olisi avoin epätyhjä joukko, joka ei leikkaa joukkoa Q, ristiriita.

Oletetaan sitten, että $\overline{Q} = X$. Oletetaan, että on avoin $V \neq \emptyset$, jolle $V \cap Q = \emptyset$. Tällöin $X - V$ on suljettu ja $Q \subset X - V$, joten $\overline{Q} \subset X - V \subsetneq X$, ristiriita. □

Lemma 10.15. — *Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon $h \colon X \to Y$ homeomorfismi. Osajoukko Q on tiheä avaruudessa X, jos ja vain jos $h(Q)$ on tiheä avaruudessa Y.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 10.16. — (1) Karkea topologinen avaruus on separoituva koska minkä tahansa epätyhjän joukon sulkeuma on koko avaruus.

(2) Olkoon X ylinumeroituva joukko ja olkoon $p \in X$. Joukon $\{p\}$ sulkeuma erityispistetopologialla varustetussa topologisessa avaruudessa (X, τ_p) on X, joten X on separoituva.

Joukon $X - \{p\}$ relatiivitopologia $\tau_p|_{X-\{p\}}$ on diskreetti topologia. Koska X on ylinumeroituva, myös $X - \{p\}$ on ylinumeroituva, joten $\big(X - \{p\}, \tau_p|_{X-\{p\}}\big)$ ei ole separoituva.

Propositio 10.17. — *Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$. Olkoon τ_1 hienompi kuin τ_2. Tällöin, jos (X, τ_1) on separoituva, niin (X, τ_2) on separoituva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

10.4 Bairen avaruudet

Määritelmä 10.18. — Topologinen avaruus on *Bairen avaruus*, jos sen tiheiden avoimien joukkojen numeroituvat leikkaukset ovat tiheitä. [3]

Propositio 10.19. — *Topologinen avaruus on Bairen avaruus, jos ja vain jos sen suljettujen sisäpisteettömien joukkojen numeroituvilla yhdisteillä ei ole sisäpisteitä.*

Todistus. Huomataan ensin, että joukko on avoin ja tiheä, jos ja vain jos sen komplementti on suljettu joukko, jolla ei ole sisäpisteitä.

Oletetaan ensin, että X on Bairen avaruus. Olkoot F_k suljettuja sisäpisteettömiä joukkoja. Olkoot $U_k = X - F_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin siis joukot U_k ovat avoimia tiheitä joukkoja. Joukoille F_k ja U_k pätee

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = X - \bigcup_{k=1}^{\infty} (X - U_k) = X - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\,.$$

Koska X on Bairen avaruus, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ on tiheä. Jos joukolla $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ olisi sisäpiste, niin olisi epätyhjä avoin joukko $V \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Tällöin siis $V \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \emptyset$, joten Lemman 10.11 nojalla $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ ei olisi tiheä.

Oletetaan sitten, että avaruuden X sisäpisteettömien suljettujen joukkojen numeroituvilla yhdisteillä ei ole sisäpisteitä. Olkoot U_k avoimia tiheitä joukkoja. Olkoot $F_k = X - U_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin siis joukot F_k ovat suljettuja sisäpisteettömiä joukkoja. Olkoon $V \subset X$ avoin epätyhjä joukko. Oletuksen mukaan joukolla $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ ei ole sisäpisteitä, joten

$$V \cap (\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k) = V \cap (X - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \neq \emptyset\,.$$

Siis Lemman 10.11 nojalla $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ on tiheä. Koska tämä pätee kaikille avointen tiheiden joukkojen kokoelmille, X on Bairen avaruus. □

Lause 10.20 (Bairen lause). — *Täydellinen metrinen avaruus on Bairen avaruus.*

Todistus. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoot $U_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}$ avoimia tiheitä joukkoja. Olkoon siis $V \neq \emptyset$ avoin joukko. Osoitamme, että $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \cap V \neq \emptyset$, jolloin $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ on tiheä Lemman 10.11 nojalla.

[3] Bairen avaruuksien yhteydessä käytetään usein myös seuraavia käsitteitä: Topologinen avaruus on *ensimmäisen kategorian avaruus*, jos se voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä harvoista joukoista. Muuten se on *toisen kategorian avaruus*. Että sanastoa saadaan varmasti riittävä määrä, ensimmäisen kategorian joukkoja sanotaan myös *laihoiksi (meagre)* joukoiksi. Lisäksi sanotaan, että topologisen avaruuden osajoukko on *harva (nowhere dense)*, jos sen sulkeumalla ei ole sisäpisteitä.

Avoin joukko U_0 on tiheä, joten $V \cap U_0$ on avoin epätyhjä joukko. Siis on $x_0 \in V \cap U_0$ ja $r_0 > 0$, joille $\overline{B}(x_0, r_0) \subset V \cap U_0$. Avoin joukko U_1 on tiheä, joten $B(x_0, r_0) \cap U_1$ on avoin epätyhjä joukko. Siis on $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_1$ ja $0 < r_1 \leq 1$, joille $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_1$. Jatkamalla näin saadaan jono pisteitä $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ja säteitä $0 < r_k \leq \frac{1}{k}$, kun $k \geq 1$, joille pätee

$$\overline{B}(x_{k+1}, r_{k+1}) \subset B(x_k, r_k) \cap U_{k+1} \subset V \cap U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_{k+1}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Koska X on täydellinen metrinen avaruus, Cantorin leikkauslauseen 6.9 nojalla

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{B}(x_{k+1}, r_{k+1}) = \{x\}$$

jollain $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \cap V \neq \emptyset$. Tämä todistaa väitteen. □

Bairen lausetta käytetään esimerkiksi funktionaalianalyysissa tärkeän Banachin ja Steinhausin lauseen eli tasaisen rajoittuneisuuden periaatteen todistuksessa. Esimakua tästä todistuksesta saamme tutustumalla harjoitustehtävään 10.14.

SEURAUS 10.21. — *Täydellinen metrinen avaruus, jolla ei ole eristettyjä pisteitä, on ylinumeroituva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

SEURAUS 10.22. — $\mathbb{R}$ *on ylinumeroituva.*

Todistus. $\mathbb{E}^1$ on täydellinen metrinen avaruus. Jokaisella $x \in \mathbb{E}^1$ myös $x + \frac{1}{k} \in \mathbb{E}^1$, joten avaruudessa ei ole eristettyjä pisteitä. Väite seuraa Seurauksesta 10.17. □

SEURAUS 10.23. — *Olkoon (X, τ) metristyvä topologinen avaruus siten, että avaruudessa X on metriikka d, jolle (X, d) on täydellinen metrinen avaruus. Tällöin (X, τ) on Bairen avaruus.* □

MÄÄRITELMÄ 10.24. — Ominaisuus P on voimassa *yleensä* eli *geneerisesti* eli *Bairen (kategorian) mielessä melkein kaikkialla* Bairen avaruudessa X, jos joukko $\{x \in X : P(x)\}$ on tiheiden avoimien joukkojen numeroituva leikkaus.

ESIMERKKI 10.25. — Ei ole kovin vaikea osoittaa, että Bairen mielessä melkein kaikki funktiot ovat missään derivoitumattomia. Yksityiskohdat esitetään esimerkiksi lähteissä [BBT] ja [TBB].

Harjoitustehtäviä

10.1. Todista Proposition 10.2 kohta (2).

10.2. Osoita, että metrisen avaruuden $(\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1), d_1)$ avoimet joukot ovat avoimia metrisessä avaruudessa $(\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{E}^1), d_\infty)$.[4]

10.3. Todista Propositio 10.8.

[4]Esimerkki 10.4.

10.4. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $A \subset X$ tiheä osajoukko. Olkoon Y Hausdorffin avaruus. Olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ jatkuvia funktioita, joille pätee $f|_A = g|_A$. Osoita, että $f = g$.

MÄÄRITELMÄ 10.26. — Olkoon

$$\tau_0 = \Big\{U \subset [-1,1] : 0 \notin U \text{ tai }]-1,1[\subset U\Big\}.$$

10.5. Osoita, että τ_0 on topologia joukossa $[-1,1]$. Onko τ_0 on Hausdorffin topologia?

10.6. Olkoon $\tau_{\mathbb{E}}$ euklidisen metriikan määräämä topologia joukossa $[-1,1]$. Onko identtinen kuvaus

$$\mathrm{id}\colon \big([-1,1], \tau_{\mathbb{E}}\big) \to \big([-1,1], \tau_0\big)$$

jatkuva? Entä kuvaus

$$\mathrm{id}\colon \big([-1,1], \tau_0\big) \to \big([-1,1], \tau_{\mathbb{E}}\big)\,?$$

10.7. Osoita, että $\big([-1,1], \tau_0\big)$ ei ole separoituva.

10.8. Todista Propositio 10.12.

10.9. Todista Propositio 10.14.

10.10. Olkoon $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ jatkuva surjektio. Osoita, että on $r > 0$ siten, että joukolla $F(B(0,r))$ on sisäpisteitä.[5]

10.11. Todista Seuraus 10.17.

10.12. Olkoon τ euklidisen metriikan määräämä topologia rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$. Osoita, että joukossa $\mathbb{Q}$ ei voi määritellä metriikkaa d, jonka indusoima topologia on τ ja jolle $(\mathbb{Q}, d)$ on täydellinen metrinen avaruus.

10.13. Olkoon X topologinen avaruus, jonka jokaisella pisteellä on ympäristö, joka on Bairen avaruus indusoidulla topologialla. Osoita, että X on Bairen avaruus.

10.14. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Olkoon $\mathscr{F} \subset \mathrm{C}^0(X, \mathbb{E}^1)$ osajoukko siten, että joukko $\mathscr{F}(x) = \{f(x) : x \in X\} \subset \mathbb{E}^1$ on rajoitettu jokaiselle $x \in X$. Osoita, että on avoin epätyhjä $U \subset X$ siten, että perhe $\mathscr{F}|_U = \{f|_U : f \in \mathscr{F}\} \subset \mathrm{C}^0(U, \mathbb{E}^1)$ on rajoitettu.[6]

[5] Sovella Bairen lausetta.
[6] Tarkastele suljettuja(!) joukkoja $X_N = \big\{x \in X : |f(x)| \leq N \text{ kaikilla } f \in \mathscr{F}\big\}$.

Luku 11

Kompaktit avaruudet

Tässä luvussa tarkastelemme kompaktiutta yleisessä topologisessa avaruudessa. Huomaamme, että osa luvussa 7 todistetuista metrisen avaruuden kompaktien osajoukkojen ominaisuuksista ei yleisty kaikille topologisille avaruuksille. Luvussa 11.2 huomaamme, että Hausdorffin avaruuksissa tilanne muistuttaa enemmän metristen avaruuksien tapausta. Luvussa 11.3 todistamme metrisen version Arzelàn ja Ascolin lauseesta ja viimeisessä luvussa tarkastelemme lyhyesti topologisen avaruuden yhden pisteen kompaktointia.

11.1 Kompaktit joukot

Määritelmä 11.1. — Topologisen avaruuden X osajoukko A on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.[1]

Esimerkki 11.2. — Esimerkissä 7.2 havaitsimme, että metrinen avaruus $\mathbb{E}^1$ ei ole kompakti. Varustetaan *laajennettu reaaliakseli*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

luonnollisella topologialla τ, jonka avoimia joukkoja ovat

(1) kaikki joukot $U \in \tau(\mathbb{E}^1)$,

(2) sellaiset muotoa $\{-\infty\} \cup U$ olevat joukot, joille $U \in \tau(\mathbb{E}^1)$ ja joille $]-\infty, a[\subset U$ jollain $a \in \mathbb{R}$

(3) sellaiset muotoa $U \cup \{+\infty\}$ olevat joukot, joille $U \in \tau(\mathbb{E}^1)$ ja joille $]b, +\infty[\subset U$ jollain $b \in \mathbb{R}$.

(4) kohtien (2) ja (3) joukkojen yhdisteet.

[1] Joskus, esimerkiksi kirjassa [Bou1], kompaktiuden määritelmässä vaaditaan, että topologinen avaruus on Hausdorffin avaruus. Syitä tähän valintaan avataan Esimerkeissä 11.10 ja 11.11. Tällä kurssilla käsittelemme yleisempää kompaktiuden määritelmää ja lisäämme Hausdorff-oletuksen tarpeen mukaan.

Laajennettu reaaliakseli on kompakti topologinen avaruus. Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ laajennetun reaaliakselin avoin peite. On siis $\alpha_{\pm\infty} \in J$, joille $\pm\infty \in U_{\alpha_{\pm\infty}}$. Luonnollisen topologian määritelmän mukaan on $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $\{-\infty\} \cup]-\infty, a[\subset U_{\alpha_{-\infty}}$ ja $]b, +\infty[\subset U_{\alpha_{+\infty}}$. Jos $a > b$, niin avoimet joukot $\pm\infty \in U_{\alpha_{\pm\infty}}$ muodostavat äärellisen osapeitteen. Muussa tapauksessa joukkojen $\pm\infty \in U_{\alpha_{\pm\infty}}$ yhdisteen komplementti $[a, b]$ on kompakti, joten on äärellinen $J_0 \subset J$, jolle $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha\in J_0} U_\alpha$. Äärellinen kokoelma $(U_\alpha)_{\alpha\in J_0\cup\{\alpha_{\pm\infty}\}}$ on siis koko laajennetun reaaliakselin peite.

Määritelmä 11.3. — Topologisella avaruudella X on *äärellisten leikkausten ominaisuus*, jos kaikilla avaruuden X suljettujen osajoukkojen kokoelmilla $(F_\alpha)_{\alpha\in J}$, joille pätee $\bigcap\limits_{\alpha\in J} F_\alpha = \emptyset$ on äärellinen $J_0 \subset J$, jolle $\bigcap\limits_{\alpha\in J_0} F_\alpha = \emptyset$.

Propositio 11.4. — *Topologinen avaruus on kompakti, jos ja vain jos sillä on äärellisten leikkausten ominaisuus.*

Todistus. Olkoon K kompakti avaruus ja olkoon $(F_\alpha)_{\alpha\in J}$ perhe avaruuden K suljettuja joukkoja, jolle pätee $\bigcap\limits_{\alpha\in J} F_\alpha = \emptyset$. Tällöin perhe $(K - F_\alpha)_{\alpha\in J}$ on joukon K peite. Oletuksen nojalla indeksijoukolla J on äärellinen osajoukko J_0, jolle pätee $\bigcup\limits_{j\in J_0}(K - F_\alpha) = K$. Siispä $\bigcap\limits_{\alpha\in J_0} F_\alpha = \emptyset$, joten avaruudella K on äärellisten leikkausten ominaisuus.

Toinen suunta väitteestä tehdään Harjoitustehtävässä 11.7. □

Seuraus 11.5 (Cantorin leikkauslause). — *Olkoon X kompakti topologinen avaruus. Olkoot*

$$X \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$$

epätyhjiä sisäkkäisiä suljettuja joukkoja. Tällöin

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

ei ole tyhjä joukko.

Todistus. Jos leikkausjoukko olisi tyhjä, niin äärellisten leikkausten ominaisuuden nojalla $E_N = \emptyset$ jollain $N \in \mathbb{N}$. □

Propositio 11.6. — *Metrinen avaruus (X, d) on kompakti, jos ja vain jos topologinen avaruus $(X, \tau(X, d))$ on kompakti*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 11.7. — *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Joukko $E \subset X$ on kompakti, jos ja vain jos topologinen avaruus $(E, \tau|_E)$ on kompakti.*

Todistus. Olkoon $E \subset X$ kompakti topologisessa avaruudessa X. Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ joukon K avoin peite avaruudessa $(K, \tau|_K)$. Relatiivitopologian määritelmän mukaan on $\widetilde{U}_\alpha \in \tau$ siten, että $U_\alpha = \widetilde{U}_\alpha \cap K$ kaikilla $\alpha \in A$. Selvästi $(\widetilde{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ on joukon K avoin peite avaruudessa X. Kompaktiusoletuksen nojalla peitteellä $(\widetilde{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ on äärellinen osapeite $(\widetilde{U}_\alpha)_{\alpha\in A_0}$, $\#A_0 < \infty$. Mutta nyt $(U_\alpha)_{\alpha\in A_0}$ on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ äärellinen osapeite.

Toinen suunta todistetaan samaan tapaan Harjoitustehtävässä 11.8. □

PROPOSITIO 11.8. — *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Täsmälleen kuten Propositio 7.12 □

SEURAUS 11.9 (WEIERSTRASSIN LAUSE). — *Olkoon X topologinen avaruus. Olkoon $K \subset X$ kompakti ja olkoon $f\colon X \to \mathbb{E}^1$ jatkuva. Tällöin on $x_0, y_0 \in K$, joille pätee*

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

ja

$$f(y_0) = \min\{f(x) : x \in K\}\,.$$

Todistus. Kuten Lause 7.19: Joukon K kuva $f(K)$ on kompakti, joten se on suljettu ja rajoitettu. Siis $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. □

Kompaktius on topologinen ominaisuus:

SEURAUS 11.10. — *Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon $h\colon X \to Y$ homeomorfismi. Tällöin X on kompakti, jos ja vain jos Y on kompakti.*

Todistus. Seuraa suoraan Propositiosta 11.6. □

Osa metristen avaruuksien Propositiosta 7.5 yleistyy suoraan topologisten avaruuksien tilanteeseen.

PROPOSITIO 11.11. — *Olkoon X topologinen avaruus.*

(1) Jos X on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin E on kompakti.

(2) Jos $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset X$ ovat kompakteja, niin $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ on kompakti.

Todistus. Väitteet todistetaan kuten Proposition 7.5 kohdat (1) ja (3). Harjoitustehtävä. □

Seuraavat esimerkit osoittavat, että Proposition 7.5 viimeinen väite ei päde yleisesti topologisissa avaruuksissa: kompaktien joukkojen leikkaus ei välttämättä ole kompakti. Lisäksi näemme, että topologisen avaruuden kompakti joukko ei välttämättä ole suljettu, jälleen toisin kuin metrisissä avaruuksissa.

ESIMERKKI 11.12. — Olkoon X ääretön joukko ja olkoon $p \in X$. Joukko $\{p\}$ on kompakti topologisessa avaruudessa (X, τ_p), missä τ_p on Esimerkissä 9.13 käsitelty erityispistetopologia. Joukko $\{p\}$ ei ole suljettu vaan $\overline{\{p\}} = X$. Koko avaruus X ei ole kompakti koska sen avoimella peitteellä $(\{p, x\})_{x \neq p}$ ei ole äärellistä osapeitettä.

ESIMERKKI 11.13. — Proposition 11.5 nojalla joukot $I = [-1, 1]$ ja

$$I^* = \Big([-1, 1] - \{0\}\Big) \cup \{0^*\}$$

ovat kompakteja Esimerkin 9.20 avaruudessa $\mathbb{R} \cup \{0^*\}$. Niiden leikkaus $[-1, 1] - \{0\}$ ei ole kompakti: Avoimella peitteellä $\Big(\mathbb{R} - [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]\Big)_{k=1}^{\infty}$ ei ole äärellistä osapeitettä. Palaamme tähän esimerkkiin vielä Esimerkissä 12.17.

PROPOSITIO 11.14. — *Kompaktin topologisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste.*

Todistus. Kuten Propositio 7.7. Harjoitustehtävä. □

11.2 Kompaktit Hausdorffin avaruudet

Propositio 11.15. — *Hausdorffin avaruuden kompaktit osajoukot ovat suljettuja.*

Todistus. Olkoon K kompakti joukko ja olkoon $x \in X - K$. Koska X on Hausdorffin avaruus on jokaisella $k \in K$ ja pisteellä x erilliset ympäristöt $U_k \ni k$ ja $V_k \ni x$. Koska K on kompakti, on äärellinen osajoukko K_0, jolle pätee $K \subset \bigcup_{k \in K_0} U_k$. Joukko $V = \bigcap_{k \in K_0} V_k$ on pisteen x avoin ympäristö, jolle pätee $V \cap U_k = \emptyset$ kaikilla $k \in K_0$, joten $V \cap K = \emptyset$ ja $V \subset X - K$. Siis $X - K$ on avoin. □

Propositio 11.16. — *Olkoon X Hausdorffin avaruus. Jos $A \neq \emptyset$ ja joukot $E_\alpha \subset X$ ovat kompakteja kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on kompakti joukko.*

Todistus. Joukko $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on Proposition 11.13 nojalla suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu Proposition 9.8 nojalla. Olkoon $\alpha_0 \in A$. Joukko $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ on kompaktin joukon E_{α_0} suljettuna osajoukkona kompakti Proposition 11.9(1) nojalla. □

Esimerkin 11.11 ja Propositioiden 11.13 ja 11.14 vuoksi monet määrittelevät kompaktiuden ainoastaan Hausdorffin avaruuksille. Joukkoa, joka toteuttaa tämän kurssin kompaktin joukon määritelmän mutta ei välttämättä ole Hausdorffin avaruus, kutsutaan tällöin usein *kvasikompaktiksi* joukoksi.

Lause 11.17. — *Olkoon K kompakti topologinen avaruus ja olkoon Y Hausdorffin avaruus. Jos $f\colon K \to Y$ on jatkuva bijektio, niin f on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon $E \subset K$ suljettu. Proposition 11.9(1) nojalla E on kompakti. Proposition 11.6 nojalla $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ on kompakti ja siis Proposition 11.13 nojalla se on suljettu koska Y on Hausdorffin avaruus. Lauseen 9.23(2) nojalla f^{-1} on jatkuva. □

Määritelmä 11.18. — Olkoon X topologinen avaruus. Joukon $E \subset X$ *ympäristö* on avoin joukko $U \subset X$, jolle pätee $E \subset U$.

Esimerkki 11.19. — (1) Topologinen avaruus X on jokaisen osajoukkonsa ympäristö.

(2) Jos (X, d) on metrinen avaruus, niin $\bigcup_{x \in E} B(x, r)$ on joukon E ympäristö kaikilla $r > 0$.

(3) Jos X on Hausdorffin avaruus, $E \subset X$ ja $x \in X - E$, niin $X - \{x\}$ on joukon E ympäristö.

Propositio 11.20. — *Olkoon X Hausdorffin avaruus. Tällöin*

(1) Jos $E \subset X$ on kompakti ja $x \notin E$, niin joukolla E ja pisteellä x on erilliset ympäristöt.

(2) Jos $E, F \subset X$ ovat kompakteja erillisiä joukkoja, niin niillä on erilliset ympäristöt.

Todistus. (1) Proposition 11.13 todistuksesta seuraa, että jokaisella $a \notin E$ ja joukolla E on erilliset ympäristöt.

(2) Harjoitustehtävä. □

11.3 Kompaktius ja jonokompaktius

MÄÄRITELMÄ 11.21. — Topologisen avaruuden X osajoukko A on *jonokompakti*, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä.

PROPOSITIO 11.22. — *Olkoon X metristyvä avaruus. Tällöin X on jonokompakti, jos ja vain jos se on kompakti.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 7.10. □

Yleisissä topologisissa avaruuksissa tilanne on monimutkaisempi. Luvussa 14 näemme, että kompakti Hausdorffin avaruus ei ole välttämättä jonokompakti eikä jonokompakti Hausdorffin avaruus ole välttämättä kompakti.

Todistamme seuraavaksi metrisen version tärkeästä Arzelàn ja Ascolin lauseesta.[2] Lausetta 11.20 käytetään funktionaalianalyysin kurssilla kompaktien operaattorien yhteydessä.

MÄÄRITELMÄ 11.23. — Olkooot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Perhe $\mathscr{F} \subset \mathrm{C}^0(X, Y)$ on *yhtäjatkuva*,[3] jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$, jolle $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ kaikille $f \in \mathscr{F}$, kun $d_X(x, y) < \delta$.

ESIMERKKI 11.24. — Jos (X, d_X) ja (Y, d_Y) ovat metrisiä avaruuksia, niin M-Lipschitz-kuvausten perhe

$$\mathrm{Lip}_M(X, Y) = \{f\colon X \to Y : d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq M d_X(x_1, x_2) \text{ kaikilla } x_1, x_2 \in X\}$$

on yhtäjatkuva: ehdosta $d_X(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon}{M}$ seuraa $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ kaikille kuvauksille $f \in \mathrm{Lip}_M(X, Y)$ kaikille $x_1, x_2 \in X$.

LAUSE 11.25 (ARZELÀN JA ASCOLIN LAUSE). — *Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $F \subset \mathrm{C}^0(X, \mathbb{E}^1)$ epätyhjä osajoukko, joka on rajoitettu, yhtäjatkuva ja suljettu. Tällöin F on kompakti.*

Todistus. Kompakti metrinen avaruus on separoituva Lauseen 7.6 nojalla, joten olkoon $Q = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ avaruuden X tiheä numeroituva osajoukko. Olkoon $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono joukossa F. Koska F on rajoitettu, jono $(f_k(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu ja sillä on siis suppeneva osajono $(f_{1j}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$. Samoin jono $(f_{1j}(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu, joten sillä on suppeneva osajono $(f_{2j}(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ ja niin edelleen. Olkoon $g_j = f_{jj}$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Konstruktion nojalla $(g_j(x_k))_{j\in\mathbb{N}}$ suppenee jokaisella k.

Osoitamme, että g_j on Cauchyn jono avaruudessa $\mathrm{C}^0(X, \mathbb{E}^1)$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ kaikille $f \in F$, kun $d(x, y) < \delta$. Koska X on kompakti, on joukon X äärellinen osajoukko $a_1, \ldots, a_N$ siten, että

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} B\Big(a_j, \frac{\delta}{2}\Big).$$

Valitaan jokaisessa pallossa $B(a_j, \frac{\delta}{2})$ piste $x_{k_j} \in Q$. Olkoon $M > 0$ siten, että kaikille $n, m \geq M$ pätee $|g_n(x_{k_j}) - g_m(x_{k_j})| < \varepsilon$ kaikilla $1 \leq j \leq N$.

[2] Tämä tulos ei mahtunut metristen avaruuksien kurssille.

[3] usein tästä käsitteestä käytetään nimitytä *tasaisesti yhtäjatkuva*, englanniksi equicontinuous

Jokaiselle $x \in X$ on $1 \le j(x) \le N$, jolle $x \in B(a_{j(x)}, \frac{\delta}{2})$. Siis $d(x, x_{k_{j(x)}}) < \delta$. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä, tietoa $g_k \in F$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja luvun M määritelmää saamme

$$\begin{aligned}|g_n(x) - g_m(x)| &= |g_n(x) - g_n(x_{k_{j(x)}}) + g_n(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x_{k_{j(x)}}) + g_m(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x)| \\ &\le |g_n(x) - g_n(x_{k_{j(x)}})| + |g_n(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x_{k_{j(x)}})| + |g_m(x_{k_{j(x)}}) - g_m(x)| \\ &< 3\,\varepsilon\end{aligned}$$

kaikilla $x \in X$, kun $n, m \ge M$. Siis jono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Proposition 6.4 nojalla $\mathrm{C}^0(X, \mathbb{E}^1)$ on täydellinen metrinen avaruus ja Lemman 6.3 nojalla F on täydellinen metrinen avaruus. Siis Cauchyn jono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee avaruudessa F, joten jonolla $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on suppeneva osajono. Siis F on jonokompakti ja Lauseen 7.10 nojalla se on kompakti. □

Esimerkki 11.26. — On helppo tarkastaa, että $\mathrm{Lip}_M(X, Y)$ on suljettu ja Esimerkin 11.19 nojalla $\mathrm{Lip}_M(X, \mathbb{E}^1)$ on yhtäjatkuva. Olkoon $x_0 \in X$. Suljettu joukko

$$\mathscr{F} = \{f \in \mathrm{Lip}_M(X, Y) : f(x_0) = 0\}$$

on rajoitettu, joten Arzelàn ja Ascolin lauseen nojalla se on kompakti kaikilla kompakteilla metrisillä avaruuksilla X.

11.4 Yhden pisteen kompaktointi

Kompaktiudesta on monia hyödyllisiä seurauksia, joten joissain tilanteissa voi olla hyödyllistä upottaa metrinen tai topologinen avaruus X johonkin kompaktiin topologiseen avaruuteen Y siten, että X ja sen kuva avaruudessa Y varustettuna relatiivitopologialla ovat homeomorfisia. Esimerkissä 11.1 kompaktoimme avaruuden $\mathbb{E}^1$ lisäämällä siihen pisteet $-\infty$ ja $+\infty$. Tässä luvussa tarkastelemme kompaktointia, jossa avaruuteen lisätään yksi piste.

Lemma 11.27. — *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus, joka ei ole kompakti, ja olkoon ∞ piste, joka ei ole avaruudessa X. Olkoon $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ ja olkoon*

$$\tau_\infty = \{U \subset \widehat{X} : \infty \in U \text{ ja } \widehat{X} - U \subset X \text{ on kompakti ja suljettu}\}.$$

Tällöin $\widehat{\tau} = \tau \cup \tau_\infty$ on topologia joukossa $\widehat{X}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Määritelmä 11.28. — Topologinen avaruus $\widehat{X}$ on topologisen avaruuden X *yhden pisteen kompaktointi* eli *Aleksandroffin kompaktointi*.

Seuraava tulos antaa perusteen avaruuden $\widehat{X}$ nimelle.

Lause 11.29. — *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus, joka ei ole kompakti. Avaruuden X yhden pisteen kompaktointi $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ on kompakti ja $(\overline{X})_{\widehat{\tau}} = \widehat{X}$. Avaruuden $\widehat{X}$ topologian relatiivitopologia joukossa X on τ.*

Todistus. Avaruus $\widehat{X}$ osoitetaan kompaktiksi samaan tapaan kuin $\overline{\mathbb{R}}$ osoitettiin kompaktiksi: Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ avaruuden $\widehat{X}$ avoin peite. On siis $\alpha_\infty \in J$, jolle $\infty \in U_{\alpha_\infty}$. Joukon

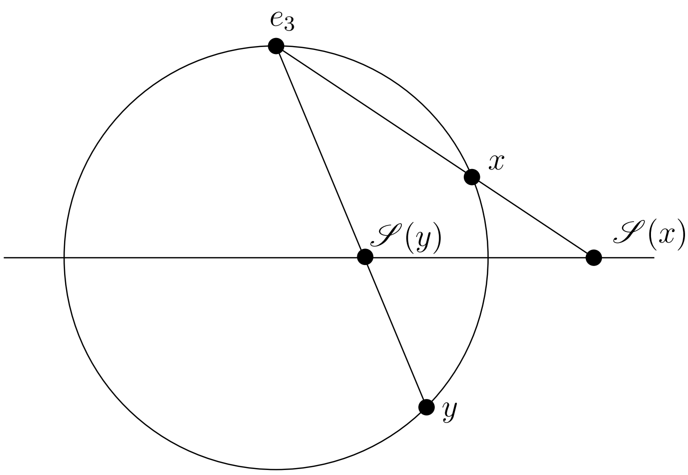
U_{α_∞} komplementti on kompakti avaruudessa X ja joukot U_α ovat avoimia. Siis on äärellinen J_0 siten, että $\widehat{X} - U_{\alpha_\infty} \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} U_\alpha$. Äärellinen kokoelma $(U_\alpha)_{\alpha \in J_0 \cup \{\alpha_\infty\}}$ on siis avaruuden $\widehat{X}$ peite.

Avaruuden $\widehat{X}$ osajoukko X on tiheä, koska topologian määritelmän mukaan pisteen ∞ jokainen ympäristö leikkaa joukkoa X. Lisäksi jokainen pisteen ∞ ympäristö leikkaa joukkoa X avoimessa joukossa $U \in \tau$. □

Esimerkki 11.30. — *Stereograafinen projektio* $\mathscr{S}\colon \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \to \mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{E}^3$ pohjoisnavalta päiväntasaajan tasolle on kuvaus, joka määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{S}^2 - \{e_3\}$

$$\mathscr{S}(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right).$$

Kuvaus S on homeomorfismi, joka liittää jokaiseen pisteeseen $x \in \mathbb{S}^2 - \{e^3\}$ sen yksikäsitteisen pisteen tasossa $\mathbb{E}^2$ (ajateltuna hypertasona $\mathbb{E}^2 \times \{0\}$ avaruudessa $\mathbb{E}^3$), joka on pisteiden e_3 ja x kautta kulkevalla suoralla.



Euklidisen tason $\mathbb{E}^2$ yhden pisteen kompaktoinnissa $\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$ äärettömyyspisteen ympäristöt ovat kompaktien joukkojen komplementtien yhdisteet äärettömyyspisteen kanssa. Tason $\mathbb{E}^2$ kompaktit joukot ovat suljettuja ja rajoitettuja. Siis joukot $\widehat{\mathbb{E}^2} - \overline{B}(0, R)$ muodostavat ympäristökannan pisteessä ∞.

Joukot $\mathscr{S}^{-1}(\mathbb{E}^2 - K) \cup \{e_3\}$ ovat pisteen e_3 ympäristöt, kun $K \subset \mathbb{E}^2$ käy läpi kaikki tason $\mathbb{E}^2$ kompaktit joukot. Siis määrittelemällä $\mathscr{S}(e_3) = \infty$ saadaan homeomorfismi $\mathscr{S}\colon \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{E}^2}$.

Euklidisen tason yhden pisteen kompaktointi on tärkeä esimerkiksi kompleksianalyysissa, jossa se esiintyy *Riemannin pallona* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Esimerkiksi kuvaus $z \mapsto \frac{1}{z}$ on hyvin määritelty ja jatkuva kuvaus Riemannin pallolla, kun asetetaan $0 \mapsto \infty$ ja $\infty \mapsto 0$.

Harjoitustehtäviä

11.1. Olkoon X joukko ja olkoon $p \in X$. Osoita, että kokoelma

$$\tau = \{U \subset X : p \notin U\} \cup \{X\}$$

on topologia. Osoita, että (X, τ) on kompakti.

11.2. Osoita, että laajennettu reaaliakseli $\overline{\mathbb{R}}$ ja metristä avaruutta $([-1,1], \mathbf{d}_1)$ vastaava topologinen avaruus ovat homeomorfisia.[4]

11.3. Osoita, että $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ on kompakti avaruudessa $\overline{\mathbb{R}}$.

MÄÄRITELMÄ 11.31. — Reaalilukujono $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *kasvaa rajatta*, jos jokaisella $M \in \mathbb{R}$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k > M$ kaikilla $k \geq N$.

11.4. Osoita, että reaalilukujono kasvaa rajatta, jos ja vain jos se suppenee pisteeseen $+\infty$ topologisessa avarudessa $\overline{\mathbb{R}}$.

11.5. Olkoon

$$\tau^* = \{\mathbb{R} - K \subset \mathbb{R} : K \text{ on kompakti avaruudessa } \mathbb{E}^1\} \cup \{\emptyset\}\,.$$

Osoita, että τ^* on topologia joukossa $\mathbb{R}$. Osoita, että $(\mathbb{R}, \tau^*)$ on kompakti.

MÄÄRITELMÄ 11.32. — Harjoitustehtävässä 11.5 määritelty topologia τ^* on reaalilukujen joukon *kompaktin komplementin topologia.*

11.6. Olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono topologisessa avaruudessa X. Oletetaan, että $x_k \to x_\infty$, kun $k \to \infty$. Osoita, että joukko $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$ on kompakti.

11.7. Olkoon A topologinen avaruus, jolla on äärellisten leikkausten ominaisuus. Osoita, että A on kompakti.

11.8. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Osoita, että joukko $E \subset X$ on kompakti, jos topologinen avaruus $(E, \tau|_E)$ on kompakti.

11.9. Osoita, että kompaktin topologisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on kasautumispiste.

11.10. Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukolla $X \neq \emptyset$ siten, että $\tau_2 \subset \tau_1$, (X, τ_1) on kompakti ja (X, τ_2) on Hausdorffin avaruus. Osoita, että topologiset avaruudet (X, τ_1) ja (X, τ_2) ovat homeomorfiset. [5]

11.11. Osoita, että kompakti Hausdorffin avaruus on Bairen avaruus.

11.12. Olkoon

$$\tau = \{U \subset \mathbb{R} : 0 \notin U \text{ tai } \#(\mathbb{R} - U) < \infty\}.$$

Osoita, että $(\mathbb{R}, \tau)$ on kompakti Hausdorffin avaruus, joka ei ole separoituva. Onko topologinen avaruus $(\mathbb{R}, \tau)$ metristyvä?

11.13. Olkoon X Hausdorffin avaruus. Olkoot $E, F \subset X$ kompakteja erillisiä joukkoja. Osoita, että joukoilla E ja F on erilliset ympäristöt.[6]

11.14. Todista Lemma 11.22.

11.15. Osoita, että rationaalilukujen metrisen avaruuden $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^1$ yhden pisteen kompaktointi ei ole Hausdorffin avaruus. [7]

[4]Keksi homeomorfismi näiden avaruuksien välille.
[5]Lause 11.15 auttaa.
[6]Käytä Propositiota 11.17(1).
[7]Osoita, että millään rationaaliluvulla ei ole ympäristöä, jonka sulkeuma on kompakti.

Luku 12

(Ko)indusoidut topologiat

Tässä luvussa aloitamme kuvausten ja kuvausperheiden avulla määriteltyihin topologioihin tutustumisen. Tutkimme ensin hieman lähemmin relatiivitopologiaa yleistyksineen ja sen jälkeen tekijätopologiaa ja sen yleistyksiä.

12.1 Relatiivitopologia ja lähtötopologia

PROPOSITIO 12.1. — *Olkoon X joukko ja olkoon (Y, τ) topologinen avaruus. Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus. Tällöin*

$$\tau^{\mathrm{i}} = \tau_f^{\mathrm{i}} = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$$

on topologia joukossa X. Kuvaus $f\colon (X, \tau^{\mathrm{i}}) \to (Y, \tau)$ on jatkuva.

Todistus. Tyhjä joukko ja X ovat kokoelmassa τ^{i} koska $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ja $f^{-1}(Y) = X$. Olkoot $U_\alpha \in \tau^{\mathrm{i}}$ kaikilla $\alpha \in A$. Tällöin $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ jollekin $V_\alpha \in \tau$. Koska τ on topologia, pätee $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \tau$. Siis

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(V_\alpha) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha\Big) \in \tau^{\mathrm{i}}\,.$$

Samalla tavalla nähdään, että kokoelman τ^{i} joukkojen äärelliset leikkaukset ovat kokoelmassa τ^{i}.

Kuvauksen f jatkuvuus on selvää Lauseen 9.23 nojalla. □

MÄÄRITELMÄ 12.2. — Propositiossa 12.1 määritelty joukon X topologia τ_f^{i} on *kuvauksen f indusoima topologia* eli *lähtötopologia.*[1]

ESIMERKKI 12.3. — Olkoon Y topologinen avaruus ja olkoon $X \subset Y$. Propositiossa 9.6 käsitelty joukon X relatiivitopologia on inkluusiokuvauksen $i\colon X \to Y$, $i(x) = x$ kaikilla $x \in X$, indusoima topologia. Jos Y on metrinen avaruus, niin Proposition 2.8 nojalla osajoukon X indusoidun metriikan metrinen topologia on joukon X relatiivitopologia.

[1] Induced topology, initial topology. Nimitys lähtötopologia ei ole yleisessä käytössä.

Olkoon esimerkiksi $X \subset \mathbb{E}^2$ euklidisen tason avoin yksikköpallo varustettuna relatiivitopologialla. Tällöin joukko $\{x \in X : x_1 \leq 0\}$ on suljettu avaruudessa X vaikka se ei ole suljettu avaruudessa $\mathbb{E}^2$. Vastaavasti, jos $X' \subset \mathbb{E}^2$ on suljettu yksikköpallo varustettuna relatiivitopologialla, niin joukko $\{x \in X' : x_1 < 0\}$ on avoin avaruudessa X' vaikka se ei ole avoin avaruudessa $\mathbb{E}^2$.

Propositio 12.4. — *Kuvauksen $f\colon X \to (Y, \tau)$ indusoima topologia on joukon X karkein topologia, jonka suhteen f on jatkuva.*

Todistus. Jos τ' on joukon X topologia, jonka suhteen f on jatkuva, niin lauseen 9.23 nojalla $f^{-1}(V) \in \tau'$ kaikilla $V \in \tau$. Siis $\tau^{\mathrm{i}} \subset \tau'$. □

Propositio 12.5. — *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon (Y, τ) topologinen avaruus. Olkoon $f\colon X \to Y$ bijektio. Tällöin kuvaus $f\colon (X, \tau^{\mathrm{i}}) \to (Y, \tau)$ on homeomorfismi.*

Todistus. Riittää osoittaa, että f^{-1} on jatkuva. Olkoon $V \subset X$ avoin. On siis avoin $U \subset Y$, jolle $V = f^{-1}(U)$. Koska f on bijektio, pätee $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V) = U$, joten $(f^{-1})^{-1}(V)$ on avoin. □

Propositio 12.6. — *Joukko $F \subset X$ on suljettu kuvauksen $f\colon X \to (Y, \tau)$ indusoimassa topologiassa, jos ja vain jos se on jonkin suljetun joukon $E \subset Y$ alkukuva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

12.2 Tekijätopologia ja maalitopologia

Propositio 12.7. — *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon (Y, τ) topologinen avaruus. Olkoon $f\colon Y \to X$ kuvaus. Tällöin*

$$\tau^{\mathrm{f}} = \{U \subset X : f^{-1}(U) \in \tau\}$$

on topologia joukossa X. Kuvaus $f\colon (Y, \tau) \to (X, \tau^{\mathrm{f}})$ on jatkuva.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Määritelmä 12.8. — Propositiossa 12.1 määritelty joukon X topologia τ^{f} on *kuvauksen f koindusoima topologia* eli *maalitopologia.*[2]

Propositio 12.9. — *Kuvauksen $f\colon (Y, \tau) \to X$ koindusoima topologia on joukon X hienoin topologia, jonka suhteen f on jatkuva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 12.10. — *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoot (Y, τ) ja Z topologisia avaruuksia. Olkoot $f\colon Y \to X$ ja $g\colon X \to Z$ kuvauksia. Tällöin $g\colon (X, \tau^{\mathrm{f}}_f) \to Z$ on jatkuva, jos ja vain jos $g \circ f\colon (Y, \tau) \to Z$ on jatkuva.*

Todistus. Jos kuvaus g on jatkuva, niin kuvauksen $g \circ f$ jatkuvuus seuraa Propositiosta 12.6. Oletetaan, että $g \circ f$ on jatkuva. Olkoon $U \subset Z$ avoin. Oletuksesta seuraa, että $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ on avoin. Maalitopologian määritelmän nojalla $g^{-1}(U)$ on avoin. □

[2]Coinduced topology, final topology. Nimitys maalitopologia ei ole yleisessä käytössä.

Tärkeä esimerkki maalitopologiasta on tekijätopologia:

MÄÄRITELMÄ 12.11. — Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukolla X. Ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokat

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

muodostavat *tekijäjoukon*

$$X/\sim \, = \Big\{[x] : x \in X\Big\}$$

ja kuvaus $p_\sim \colon X \to X/\sim$,

$$p_\sim(x) = [x]\,,$$

on *tekijäkuvaus* eli *luonnollinen tai kanoninen projektio*. Luonnollisen projektion $p_\sim$ määräämä maalitopologia tekijäjoukolla on tekijäjoukon $X/\sim$ *tekijätopologia*. Topologinen avaruus $(X/\sim, \tau^{\mathrm{f}}_{p_\sim})$ on topologisen avaruuden X *(topologinen) tekijäavaruus*.

PROPOSITIO 12.12. — *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukolla X. Tekijäkuvaus $p_\sim \colon X \to X/\sim$ on jatkuva surjektio, kun $X/\sim$ on varustettu tekijätopologialla.*

Todistus. Tekijäkuvaus on määritelmänsä nojalla surjektio ja Proposition 12.6 nojalla jatkuva. □

MÄÄRITELMÄ 12.13. — Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X. Kuvaus $f \colon X \to Y$ on *yhteensopiva* ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa, jos $f(x_1) = f(x_2)$ kaikille $x_1, x_2 \in X$, joille pätee $x_1 \sim x_2$.

Jos kuvaus $f \colon X \to Y$ on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa, niin se määrää kuvauksen $f_\sim \colon X/\sim \, \to Y$,

$$f_\sim([x]) = f(x)\,.$$

Tällöin pätee siis $f = f_\sim \circ p_\sim$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p_\sim"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, "f_\sim"'] & Y \end{tikzcd}$$

Propositio 12.8 antaa hyödyllisen tuloksen muotoiltuna tekijäavaruuden tilanteeseen.

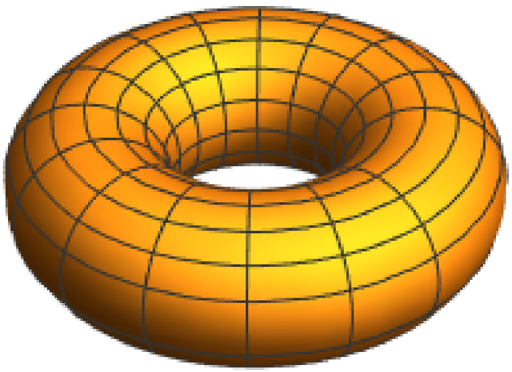
SEURAUS 12.14. — *Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio topologisessa avaruudessa X ja olkoon (Y, τ_Y) topologinen avaruus. Olkoon $f \colon X \to Y$ kuvaus, joka on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa. Tällöin f on jatkuva, jos ja vain jos $f_\sim$ on jatkuva.* □

ESIMERKKI 12.15. — Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio avaruudessa $\mathbb{E}^1$, jolla on kaksi ekvivalenssiluokkaa $A = \{x \in \mathbb{E}^1 : x \le 0\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{E}^1 : x > 0\}$. Tekijäavaruuden $\{A, B\}$ topologia on $\{\emptyset, \{B\}, \{A, B\}\}$, joten se on homeomorfinen Esimerkissä 9.4 käsitellyn Sierpínskin avaruuden kanssa. Erityisesti $\mathbb{E}^1/\sim$ ei ole Hausdorffin avaruus.

PROPOSITIO 12.16. — *Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio topologisessa avaruudessa X. Jos $X/\sim$ on Hausdorffin avaruus, niin ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokat ovat suljettuja.*

Todistus. Jos $X/\sim$ on Hausdorffin avaruus, niin sen yhden pisteen joukot ovat suljettuja Proposition 9.18 nojalla. Ekvivalenssiluokat ovat yhden pisteen joukkojen alkukuvia tekijäkuvauksella, joten ne ovat suljettuja Lauseen 9.23 nojalla koska tekijäkuvaus on jatkuva. □

Esimerkki 12.17. — (1) Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ tasossa $\mathbb{E}^2$ asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Tällöin jokaisella ekvivalenssiluokalla on täsmälleen yksi edustaja joukossa $[0,1[^2$. Topologinen tekijäavaruus $\mathbb{E}^2/\sim$ on *torus*.



Kuva 121: Torus.

(2) Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ avaruudessa $\mathbb{S}^2$ asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $y = \pm x$. Tekijäavaruus $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ on *(reaalinen) projektiivinen taso*. Jokaisella projektiivisen tason pisteellä on ympäristö, joka on homeomorfinen euklidisen tason pallon kanssa. Edellä käsitellystä toruksesta poiketen projektiivista tasoa ei voi upottaa avaruuteen $\mathbb{E}^3$.

(3) Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{R}$ asettamalla ekvivalenssiluokiksi joukot $\mathbb{Z}$ ja kaikki yhden pisteen joukot $\{x\}$, kun $x \notin \mathbb{Z}$. Ekvivalenssirelaatiossa siis samastetaan kaikki kokonaisluvut yhdeksi pisteeksi ja mitään muita samastuksia ei tehdä. Topologinen tekijäavaruus $\mathbb{E}^1/\sim$ on *numeroituva ympyräkimppu*.

Numeroituva ympyräkimppu ei ole N_1-avaruus: Cantorin diagonaalitodistuksella voi osoittaa, että pisteellä $[0]$ ei ole numeroituvaa ympäristökantaa. Olkoon U pisteen $[0]$ ympäristö. Määritelmän mukaan $p_\sim^{-1}(U)$ on avoin joukko avaruudessa $\mathbb{E}^1$ ja jokaiselle $n \in \mathbb{Z}$ on $r_n > 0$ siten, että $B(n, r_n) \subset p_\sim^{-1}(U)$. Olkoot U_k, $k \in \mathbb{N}$ pisteen $[0]$ ympäristöjä. Valitaan pallot $B(k, r_k) \subset \mathbb{E}^1$ siten, että $B(k, r_k) \subset p_\sim^{-1}(U_k)$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Tekijätopologian määritelmän nojalla joukko

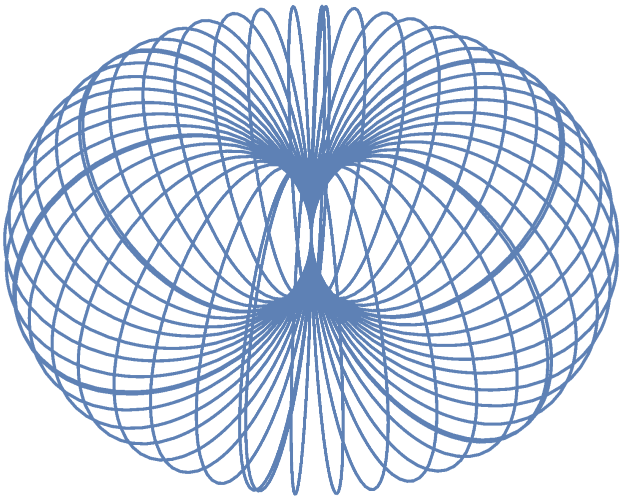
$$V = p_\sim\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B(k, \frac{r_{|k|}}{2})\Big)$$

on pisteen pisteen $[0]$ avoin ympäristö. Yksikään joukoista U_k ei sisälly joukkoon V, joten joukot U_k eivät muodosta pisteen $[0]$ ympäristökantaa.

Proposition 10.6 nojalla numeroituva ympyräkimppu ei ole metristyvä. Se ei ole kompakti koska esimerkiksi peitteellä

$$\Big\{p_\sim(B(k, \frac{1}{2})) : k \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \{p_\sim(]k, k+1[) : k \in \mathbb{Z}\}$$

ei ole äärellistä osapeitettä.



Kuva 122: 50 yhdessä pisteessä leikkaavaa ympyrää.

12.3 Kuvausperheen maalitopologia

Yhden kuvauksen määräämä maalitopologia voidaan yleistää kuvausperheiden tapaukseen seuraavan tuloksen avulla.

Propositio 12.18. — *Olkoon $X \neq \emptyset$. Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot (X_α, τ_α) topologisia avaruuksia. Olkoot $f_\alpha \colon X_\alpha \to X$ kuvauksia. Tällöin*

$$\tau^{\mathrm{f}} = \left\{ U \subset X : f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha \,\forall\, \alpha \in A \right\}$$

on topologia joukossa X. Kuvaukset $f_\alpha \colon X_\alpha \to (X, \tau^{\mathrm{f}})$ ovat jatkuvia.

Todistus. Olkoon τ_α^{f} kuvauksen f_α maalitopologia. Tällöin $\tau^{\mathrm{f}} = \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha^{\mathrm{f}}$ on topologia Harjoitustehtävän 9.2 nojalla. Kuvausten f_α jatkuvuus seuraa jatkuvuuden karakterisaatiosta Lauseessa 9.23. □

Määritelmä 12.19. — Propositiossa 12.14 määritelty joukon X topologia τ^{f} on *kuvausperheen $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ koindusoima topologia* eli *maalitopologia.*

Propositio 12.20. — *Kuvausperheen $f_\alpha \colon (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to X$ koindusoima topologia on joukon X hienoin topologia, jonka suhteen kaikki kuvaukset f_α ovat jatkuvia.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 12.21. — *Olkoot X_α topologisia avaruuksia ja olkoon joukossa X kuvausperheen $f_\alpha \colon X_\alpha \to X$ koindusoima topologia. Olkoon Y topologinen avaruus. Kuvaus $g \colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos kaikki kuvaukset $g \circ f_\alpha$ ovat jatkuvia.*

Todistus. Jos kuvaus g on jatkuva, niin kuvausten $g \circ f_\alpha$ jatkuvuus seuraa Propositiosta 12.14. Oletetaan, että $g \circ f_\alpha$ on jatkuva kaikilla α. Olkoon $U \subset Y$ avoin. Oletuksesta seuraa, että $f_\alpha^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f_\alpha)^{-1}(U)$ on avoin kaikilla α. Maalitopologian määritelmän nojalla $g^{-1}(U)$ on avoin. □

Määritelmä 12.22. — Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot $X_\alpha \neq \emptyset$ joukkoja. Joukkojen X_α *erillinen yhdiste* on

$$\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha = \Big\{(x, \alpha) : x \in X_\alpha \;\; \alpha \in A\Big\}.$$

Olkoon $\alpha_0 \in A$. Kuvaus $i_{\alpha_0} \colon X_{\alpha_0} \to \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$,

$$i_{\alpha_0}(x) = (x, \alpha_0)$$

on *luonnollinen injektio* joukolle X_{α_0}.

Jos $X_\alpha = X$ kaikilla $\alpha \in A$, niin $\coprod_{\alpha \in A} X$ samastuu luonnollisella tavalla tulojoukon $X \times A$ kanssa.

Erillisessä yhdisteessä $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ on luontevaa käyttää luonnollisten injektioiden perheen $(i_\alpha)_{\alpha \in A}$ maalitopologiaa:

Määritelmä 12.23. — Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot (X_α, τ_α) topologisia avaruuksia. *Erillisen yhdisteen topologia* joukossa $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ on

$$\tau = \Big\{U \subset \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha : i_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha, \; \forall \, \alpha \in A\Big\}.$$

Esimerkki 12.24. — Varustetaan $\mathbb{E}^1 \times \{0,1\}$ erillisen yhdisteen topologialla. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{E}^1 \times \{0,1\}$ asettamalla $(x, 0) \sim (x, 1)$ kaikille $x \in \mathbb{E} - \{0\}$. Tekijäavaruus[3] $(\mathbb{E}^1 \times \{0,1\})/\sim$ on homeomorfinen Esimerkissä 9.20 tarkastellun kahden nollan reaalilukuavaruuden kanssa: Kuvaus $f \colon \mathbb{E}^1 \times \{0,1\} \to \mathbb{R} \times \{0^*\}$,

$$\begin{cases} f(x, j) = x & , \text{ kun } x \neq 0 \\ f(0, 0) = 0 & \\ f(0, 1) = 0^* & \end{cases} ,$$

on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa. On helppo nähdä, että f on jatkuva ja että f kuvaa avaruuden $\mathbb{E}^1 \times \{0,1\}$ avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.[4] Seurauksen 12.10 nojalla f määrää jatkuvan bijektion $f_\sim \colon (\mathbb{E}^1 \times \{0,1\})/\sim \to \mathbb{R} \cup \{0^*\}$, jolle pätee $f = f_\sim \circ p_\sim$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^1 \times \{0,1\} \arrow[d, "p_\sim"'] \arrow[dr, "f"] & \\
(\mathbb{E}^1 \times \{0,1\})/\sim \arrow[r, "f_\sim"'] & \mathbb{R} \cup \{0^*\}
\end{tikzcd}$$

Koska f on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa, pätee $f_\sim(A) = f(p_\sim^{-1}(A)$ kaikille $A \subset \mathbb{E}^1 \times \{0,1\})/\sim$. Jos $U \subset \mathbb{E}^1 \times \{0,1\})/\sim$ on avoin, niin tekijätopologian määritelmän nojalla $p_\sim^{-1}(U)$ on avoin, joten $f_\sim(U) = f(p_\sim^{-1}(U)$ on avoin. Siis $f_\sim$ on homeomorfismi.

Tämä esimerkki osoittaa, että Hausdorffin avaruuden tekijäavaruus ei välttämättä ole Hausdorffin avaruus vaikka kaikki ekvivalenssiluokat olisivat suljettuja. Siis Proposition 12.12 käänteinen väite ei päde.

Koska tekijäkuvaus $p_\sim \colon \mathbb{E}^1 \times \{0,1\} \to \mathbb{E}^1 \times \{0,1\}/\sim$ on jatkuva, on helppo nähdä, että Esimerkin 11.11 joukot I ja I^* ovat kompakteja.

[3] Muista, että tekijäavaruus on ekvivalenssirelaation tekijäjoukko, jossa käytetään tekijätopologiaa.
[4] Sanotaan, että f on *avoin kuvaus.*

Harjoitustehtäviä

12.1. Todista Propositio 12.5.

12.2. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$. Olkoon $E \subset Y$. Osoita, että $(\overline{E})_{\tau|_Y} = (\overline{E})_\tau \cap Y$.

12.3. Todista Propositio 12.6.

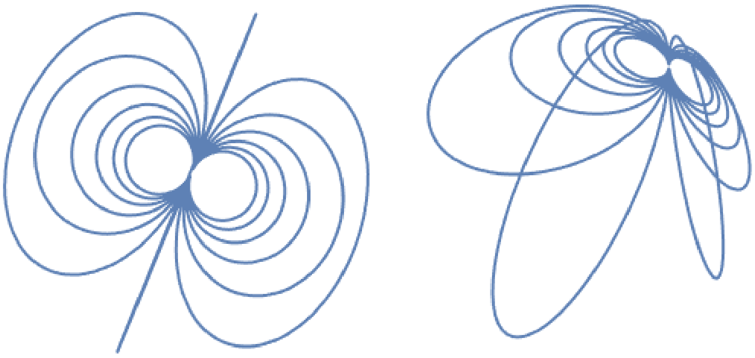
12.4. Todista Propositio 12.7.

12.5. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio avaruudessa $\mathbb{E}^1$, jolla on kaksi ekvivalenssiluokkaa $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{E}^1 - \mathbb{Q}$. Määritä tekijäavaruuden $\mathbb{E}^1/\sim$ topologia.

12.6. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ avaruudessa $[0,1] \subset \mathbb{E}^1$ asettamalla $0 \sim 1$ ja muut pisteet ekvivalenteiksi vain itsensä kanssa. Osoita, että $[0,1]/\sim$ on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{S}^1$ kanssa.[5]

12.7. Todista Propositio 12.15.

12.8. Joukko $X_0 = \mathbb{E}^1 - \mathbb{Z}$ on erillisten avoimien välien $]k, k+1[$ numeroituva yhdiste. Esimerkissä 12.13(3) tarkasteltava numeroituva ympyräkimppu X saadaan lisäämällä topologiseen avaruuteen X_0 yksi piste $[0]$. Topologinen avaruus X_0 on homeomorfinen avaruuden $Y_0 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{Z}$ kanssa, kun Y_0 varustetaan euklidisesta tasosta $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^1$ saatavalla relatiivitopologialla. Stereograafisen projektion käänteiskuvaus kuvaa avaruuden Y_0 homeomorfisesti pallopinnalle $\mathbb{S}^2$. Avaruuden Y_0 yhden pisteen kompaktointi saadaan lisäämällä avaruuteen $\mathscr{S}^{-1}(Y_0)$ yksi piste $e_3 \in \mathbb{S}^2$. Näin saadaan siis kompakti avaruus lisäämällä yksi piste avaruuteen, joka on homeomorfinen avaruuden X_0 kanssa. Miten pisteen e_3 ympäristö avaruudessa $\mathscr{S}^{-1}(Y_0) \cup \{e_3\}$ poikkeaa pisteen $[0]$ ympäristöstä avaruudessa X?



Kuva 123: Kaksi näkymää 13 ympyrästä avaruudessa $\mathscr{S}^{-1}(Y_0) \cup \{e_3\}$.

[5]Käytä kuvausta $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Voisiko Lausetta 11.15 käyttää?

Luku 13

Kanta ja esikanta

Tässä luvussa tarkastelemme tapoja määritellä topologia lähtemällä joukkoperheestä, joka ei välttämättä ole topologia. Esimerkki tällaisesta perheestä on metrisen avaruuden avoimien pallojen kokoelma: Kahden pallon leikkaus ei välttämättä ole pallo mutta kaikki metrisen avaruuden avoimet joukot voidaan esittää yhdisteenä avoimista palloista.

13.1 Topologian kanta

Määritelmä 13.1. — Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Topologian τ osajoukko β on topologian τ *kanta*, jos jokaiselle $U \in \tau - \{\emptyset\}$ on $B_i \in \beta$ siten, että

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i$$

jollekin indeksijoukolle I.

Esimerkki 13.2. — Avoimet pallot muodostavat metrisen avaruuden metrisen topologian kannan.

Propositio 13.3. — *Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Olkoon β_Y topologian τ_Y kanta. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(B) \in \tau_X$ kaikilla $B \in \beta_Y$.*

Todistus. Oletetaan, että topologian τ_Y kannalle β_Y pätee $f^{-1}(B) \in \tau_X$ kaikilla $B \in \beta_Y$. Jos $U \in \tau_Y$, niin on avoimet joukot $V_\alpha \in B$, joille pätee $U = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$. Tällöin

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(V_\alpha) \in \tau_X\,,$$

joten f on jatkuva. Toinen suunta väitteestä on selvä. □

Lemma 13.4. — *Olkoon X topologinen avaruus, jonka topologian kanta on β. Joukko $Q \subset X$ on tiheä, jos ja vain jos $Q \cap V \neq \emptyset$ kaikilla $V \in \beta$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 13.5 (Kantalemma). — *Olkoon $X \neq \emptyset$. Olkoon $\beta \subset \mathscr{P}(X)$ kokoelma, jolle pätee*

(1) $\bigcup_{B\in\beta} B = X$ *ja*

(2) jos $B_1, B_2 \in \beta$ *ja* $x \in B_1 \cap B_2$, *niin on* $B \in \beta$, *jolle pätee* $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Tällöin β on topologian

$$\tau(\beta) = \Big\{ \bigcup_{B\in J} B : J \subset \beta \Big\} \cup \{\emptyset\} .$$

kanta.

Todistus. Osoitetaan, että $\tau(\beta)$ on topologia. Tällöin β on automaattisesti sen kanta.

Kokoelma $\tau(\beta)$ määriteltiin niin, että $\emptyset \in \beta$ ja ehdon (1) nojalla $X = \bigcup_{B\in\beta} B \in \tau(\beta)$. Olkoot sitten $U_1, U_2, \ldots, U_N \in \tau(\beta)$ ja olkoon $x \in \bigcap_{j=1}^N U_j$. Joukkojen U_j määritelmän nojalla jokaisella $1 \leq j \leq N$ on $B_j \in \beta$, jolle $x \in B_j \subset U_j$. Ehdon (2) nojalla on $B_x \in \beta$, jolle pätee $x \in B_x \subset \bigcap_{j=1}^N B_j \subset \bigcap_{j=1}^N U_j$. Siis

$$\bigcap_{j=1}^N U_j = \bigcup_{x\in\bigcap_{j=1}^N U_j} B_x \in \tau(\beta) .$$

Lisäksi, jos $U_\alpha = \bigcup_{j\in J_\alpha} B_{\alpha j} \in \tau(\beta)$, niin

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} \bigcup_{j\in J_\alpha} B_{\alpha j} \in \tau(\beta) .$$

Siis kaikki topologian ehdot toteutuvat. □

Lemma 13.6 (Toinen kantalemma). — *Olkoon (X,τ) topologinen avaruus. Olkoon $\beta \subset \tau$. Jos jokaiselle $U \in \tau$ ja jokaiselle $x \in U$ on $B \in \beta$, jolle $x \in B \subset U$, niin β on topologian τ kanta.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 13.7. — Toisen kantalemman nojalla kokoelma

$$\beta = \tau(\mathbb{E}^1) \cup \Big\{\{-\infty\} \cup]-\infty, a[\,:\, a \in \mathbb{R}\Big\} \cup \Big\{]b, \infty[\cup \{\infty\} : b \in \mathbb{R}\Big\}$$

on Esimerkissä 11.1 tarkastellun laajennetun reaalilukujen joukon

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

topologian kanta.

13.2 N_2-avaruudet

MÄÄRITELMÄ 13.8. — Topologinen avaruus X on N_2-avaruus, jos sen topologialla on numeroituva kanta.

PROPOSITIO 13.9. — *N_2-avaruus on separoituva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

LAUSE 13.10. — *Separoituva metrinen avaruus on N_2-avaruus.*

Todistus. Olkoon X separoituva metrinen avaruus ja olkoon $Q = \{q_k : k \in \mathbb{N}\} \subset X$ numeroituva tiheä osajoukko. Osoitetaan, että kokoelma

$$\beta = \Big\{B\Big(q_k, \frac{1}{n}\Big) : k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\Big\}$$

on avaruuden X metrisen topologian kanta. Olkoon $U \subset X$ avoin ja olkoon $x \in U$. Tällöin on $n(x) \in \mathbb{N} - \{0\}$, jolle $B\Big(x, \frac{1}{n(x)}\Big) \subset U$. Koska Q on tiheä, on $q(x) \in B\Big(x, \frac{1}{2n(x)}\Big) \cap Q$ ja kolmioepäyhtälön nojalla

$$x \in B\Big(q(x), \frac{1}{2n(x)}\Big) \subset B\Big(x, \frac{1}{n(x)}\Big) \subset U\,.$$

Siis

$$U = \bigcup_{x \in U} B\Big(q(x), \frac{1}{2n(x)}\Big)$$

on yhdiste kokoelman β palloista. □

SEURAUS 13.11. — *Kompakti metrinen avaruus on N_2-avaruus.*

Todistus. Seuraa Lauseista 7.6 ja 13.8. □

ESIMERKKI 13.12. — Olkoon X ylinumeroituva joukko ja olkoon $p \in X$ erityispiste. Esimerkissä 10.13 näimme, että erityispistetopologialla varustettu avaruus (X, τ_p) on separoituva, sillä $\overline{\{p\}} = X$. Avoin joukko $\{p, x\}$ ei sisällä muita pisteen x ympäristöjä, joten topologian kannan tulee sisältää joukko $\{p, x\}$ jokaisella $x \in X - \{p\}$. Siis (X, τ_p) ei ole N_2-avaruus.

LEMMA 13.13. — *N_2-avaruus on N_1-avaruus.* □

ESIMERKKI 13.14. — Esimerkissä 12.13(3) käsitelty numeroituva ympyräkimppu ei ole N_1, joten se ei ole N_2.

13.3 Kompaktin suppenemisen topologia

Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Olkoon

$$\mathrm{C}^0(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ on jatkuva}\}\,.$$

Metristen avaruuksien kurssilla luvussa 6.1 osoitimme, että normiavaruudet

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{raj}}(X, \mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}^0(X, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

ovat täydellisiä, kun X on metrinen avaruus. Erityisesti siis $\mathrm{C}^0(X,\mathbb{R})$ on täydellinen metrinen avaruus, kun X on kompakti. Harjoituksissa tarkastimme, että kompaktin metrisen avaruuden X tapauksessa jonon suppeneminen metrisessä avaruudessa $\mathrm{C}^0(X,\mathbb{R})$ on sama käsite kuin funktiojonon tasainen suppeneminen.

PROPOSITIO 13.15. — *Olkoon X kompakti topologinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Lauseke*

$$d_{\mathrm{C}^0(X,Y)}(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)) \tag{13.1}$$

on metriikka avaruudessa $\mathrm{C}^0(X,Y)$. Avaruus $(\mathrm{C}^0(X,Y), d_{\mathrm{C}^0(X,Y)})$ on täydellinen, jos Y on täydellinen.

Todistus. Kuten Propositio 6.4, jossa X on metrinen avaruus ja $Y=\mathbb{E}^1$. Harjoitustehtävä. □

Topologia antaa keinon tarkastella sellaisiakin jatkuvia kuvauksia, jotka eivät ole rajoitettuja. Muistamme, että jatkuva kuvaus, joka saa arvoja metrisessä avaruudessa, on rajoitettu jokaisessa määrittelyjoukkonsa kompaktissa osajoukossa. Olkoon $f\in\mathrm{C}^0(X,Y)$, olkoon $K\subset X$ kompakti ja olkoon $r>0$. Olkoon

$$B(f,K,r) = \Big\{g\in\mathrm{C}^0(X,Y) : d_{\mathrm{C}^0(K,Y)}(f,g) < r\Big\}. \tag{13.2}$$

PROPOSITIO 13.16. — *Kokoelma*

$$\Big\{B(f,K,r) : f\in\mathrm{C}^0(X,Y),\ K\subset X \text{ on kompakti},\ r>0\Big\}$$

on topologian kanta avaruudessa $\mathrm{C}^0(X,Y)$.

Todistus. Tarkastetaan, että joukkojen $B(f,K,r)$ kokoelma toteuttaa Kantalemman 13.4 ehdot. Ensimmäinen ehto on selvä koska jokainen yhden pisteen joukko $\{x\}\subset X$ on kompakti ja jokaiselle $f\in\mathrm{C}^0(X,Y)$ pätee $f\in B(f,\{x\},1)$ kaikilla $x\in X$.

Olkoot $f_1,f_2\in\mathrm{C}^0(X,Y)$, olkoot $K_1,K_2\subset X$ kompakteja, olkoot $r_1,r_2>0$ ja olkoon $g\in B(f_1,K_1,r_1)\cap B(f_2,K_2,r_2)$. Olkoon

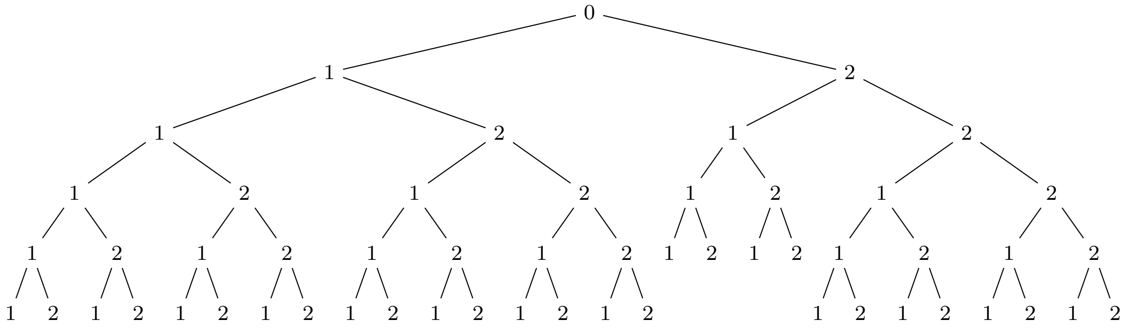
$$s = \min_{j\in\{1,2\}}\Big(r_j - d_{\mathrm{C}^0(K_j,Y)}(f|_{K_j}, g|_{K_j})\Big).$$

Kolmioepäyhtälön nojalla $B(g,K_1\cup K_2,s)\subset B(f_1,K_1,r_1)\cap B(f_2,K_2,r_2)$. □

MÄÄRITELMÄ 13.17. — Proposition 13.14 antama topologia on *kompaktin suppenemisen topologia* avaruudessa $\mathscr{F}(X,Y)$. Jos jono $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee kompaktin suppenemisen topologiassa, sanotaan, että se *suppenee kompaktisti* tai *suppenee tasaisesti kompakteilla joukoilla.*

LAUSE 13.18. — *Olkoon X N_1-avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Olkoot $f_k\in\mathrm{C}^0(X,Y)$ kaikilla $k\in\mathbb{N}$. Jos jono (f_k) suppenee kompaktisti, niin rajafunktio on jatkuva.*

Todistus. Katso esimerkiksi [Mun, §46] □



Esimerkki 13.19. — Olkoon X metrinen avaruus, joka saadaan äärettömästä juurellisesta binääripuusta asettamalla jokaisen oksan pituudeksi 1.[1] Tässä puussa on yksi kärki, josta lähtee vain kaksi oksaa. Tämä kärki on puun *juuri* x_0, jota on alla olevassa kuvassa merkitty luvulla 0. Jokaisesta muusta kärjestä lähtee kolme oksaa. Puun kärjet on kuvassa pirretty niin, että jokaisella pallopinnalla $\{y \in X : d(0,y) = n\}$ olevat kärjet ovat kuvassa rinnakkain. Kuvassa on esitetty avaruuden X pallo $B(0,5)$ lähes kokonaan, puu jatkuu samanlaisella haarautumisella rajattomasti alaspäin. Jokaisella puun kärjellä $v \in X$, jolle pätee $d(v,0) = n$, on kaksi kärkeä joukossa $\{y \in X : d(0,y) = n+1,\ d(v,y) = 1\}$. Kuvassa näille kärjen *jälkeläisille* on annettu merkit 1 ja 2 ja näin määritellään kuvaus $L\colon X - \{x_0\} \to \{1,2\}$.

Olkoon

$$\mathscr{G} = \{\gamma \in \mathrm{C}^0([0,\infty[, X) : \gamma(0) = 0 \text{ ja } \gamma \text{ on isometrinen upotus}\}$$

Kuvaus $\Phi\colon \mathscr{G} \to \{1,2\}^{\mathbb{N}-\{0\}} = \{\omega\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \{1,2\}\}$,

$$\Phi(\gamma) = L \circ \gamma|_{\mathbb{N}-\{0\}}\,,$$

on selvästi bijektio.

Olkoon $\underline{1} \in \{1,2\}^{\mathbb{N}-\{0\}}$ jono, jolle $\underline{1}(k) = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon $\underline{1}_n \in \{1,2\}^{\mathbb{N}-\{0\}}$ jono, jolle pätee $\underline{1}_n(k) = 1$ kaikilla $1 \le k \le n$ ja $\underline{1}_n(k) = 2$ kaikilla $k \ge n$. Tällöin isometristen upotusten jono $(\Phi^{-1}(\underline{1}_n))_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kompakteilla joukoilla raja-arvoon $\Phi^{-1}(\underline{1})$.

13.4 Topologian esikanta

Seuraava kannan ilmoittamista yleisempi menetelmä topologian määrittämiseen on joskus käyttökelpoinen. Käytämme sitä luvussa 14 yleisen tulotopologian määrittelyssä.

Lemma 13.20. — *Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko ja olkoon $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ siten, että $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = X$. Tällöin joukko*

$$\beta(\mathscr{A}) = \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i : A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \Big\}.$$

on jonkin topologian $\tau(\mathscr{A})$ kanta.

[1] Kuvan avulla tämä määrittely antaa riittävän tarkan mielikuvan metrisestä avaruudesta X. Täsmälliseen määrittelyyn tarvitaan *tekijämetriikan* käsitettä, joka kertoo muodollisesti, miten numeroituvasta kokoelmasta yksikköjanan $[0,1]$ kopioita muodostetaan metrinen avaruus, katso esimerkiksi [BH, s. 64-]

Todistus. Sovella Kantalemmaa 13.4 □

Määritelmä 13.21. — Lemmassa 13.17 määritelty topologia $\tau(\mathscr{A})$ on *joukkoperheen $\mathscr{A}$ virittämä topologia.* Joukkoperhe $\mathscr{A}$ on topologian τ *esikanta*, jos $\tau = \tau(\mathscr{A})$.

Esimerkki 13.22. — (1) Topologian kanta on sen esikanta.
(2) Rajoittamattomien välien $]-\infty, b[$ ja $]a, \infty[$ kokoelma, missä $a, b \in \mathbb{E}$, on reaalilukujen euklidisen topologian $\tau(\mathbb{E}^1)$ esikanta.
(3) Laajennettujen rajoittamattomien välien $[-\infty, b[$ ja $]a, \infty]$ kokoelma, missä $a, b \in \mathbb{R}$, on laajennetun reaalilukujen joukon $\overline{\mathbb{R}}$ topologian esikanta.

Propositio 13.23. — *Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Olkoon $\mathscr{A}_Y$ topologian τ_Y esikanta. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f^{-1}(A) \in \tau_X$ kaikilla $A \in \mathscr{A}_Y$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Määritelmä 13.24. — Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Määritellään jokaiselle avoimelle joukolle $U \subset X$ ja jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset X$

$$V(K, U) = \{f \in \mathrm{C}^0(X, Y) : f(K) \subset U\}.$$

Kokoelman

$$\mathscr{A} = \{V(K, U) : K \text{ kompakti }, U \text{ avoin}\}$$

virittämää avaruuden $\mathrm{C}^0(X, Y)$ topologiaa kutsutaan *kompakti-avoimeksi topologiaksi.*

Emme käsittele kompakti-avointa topologiaa tällä kurssilla, siitä voi lukea esimerkiksi lähteistä [Mun, §46] ja [Väi2, Luku 26].

Harjoitustehtäviä

13.1. Todista Lemma 13.3.

13.2. Todista Lemma 13.5.

13.3. Osoita, että kokoelma $\{[a, b[: a < b\}$ on jonkin topologian τ_- kanta joukossa $\mathbb{R}$.

Määritelmä 13.25. — Harjoitustehtävässä 13.3 määritelty topologia τ_- on reaalilukujen joukon *alarajatopologia.*

13.4. Osoita, että $(\mathbb{R}, \tau_-)$ on N_1 mutta ei N_2.

13.5. Onko metrisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ suljettujen pallojen kokoelma

$$\left\{\overline{B}(x, r) : x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0\right\}$$

jonkin topologian kanta? Onko tilanne erilainen ultrametrisessä avaruudessa?

13.6. Osoita, että N_2-avaruus on separoituva.

13.7. Anna esimerkki jonosta funktioita $f_k\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$, joka suppenee nollafunktioon tasaisesti kompakteilla osajoukoilla mutta ei suppene tasaisesti.

13.8. Todista Propositio 13.13.

13.9. Todista Lemma 13.17.

MÄÄRITELMÄ 13.26. — Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Tulojoukon $X \times Y$ *tulotopologia* on se topologia, jonka kanta on

$$\beta_{X \times Y} = \{U \times V : U \in \tau(X),\ V \in \tau(Y)\}\,.$$

13.10. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Osoita, että $\beta_{X \times Y}$ on jonkin topologian kanta joukossa $X \times Y$. Osoita, että $\beta_{X \times Y}$ ei yleensä ole topologia.

13.11. Olkoot $p_X \colon X \times Y \to X,\ p_X(x, y) = x$ ja $p_Y \colon X \times Y \to Y$, $p_Y(x, y) = y$. Osoita, että kokoelma

$$\mathscr{A} = \left\{p_X^{-1}(U) : U \in \tau(X)\right\} \cup \left\{p_Y^{-1}(V) : V \in \tau(Y)\right\}$$

on avaruuden $X \times Y$ tulotopologian esikanta.

13.12. Todista Propositio 13.19

Luku 14

Tulotopologia

Metristen avaruuksien kurssilla tarkastelimme kahden ja yleisemmin äärellisen monen metrisen avaruuden tuloavaruutta ja määrittelimme siihen metriikoita, katso luku 4.3. Tarkastelemme nyt topologisten avaruuksien tuloavaruuksia yleisemmin.

14.1 Yleinen tulojoukko ja tulotopologia

MÄÄRITELMÄ 14.1. — Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot $X_\alpha \neq \emptyset$ joukkoja. Joukkojen X_α *tulojoukko* on

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \Big\{ x \colon A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : x(\alpha) \in X_\alpha \ \ \forall\, \alpha \in A \Big\}\,.$$

Olkoon $\alpha_0 \in A$. Kuvaus $p_{\alpha_0} \colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_{\alpha_0}$,

$$p_{\alpha_0}(x) = x(\alpha_0)$$

on *projektio* joukolle X_{α_0}.

Se, että yleinen tulojoukko on epätyhjä, seuraa valinta-aksioomasta. Tällä emme pohdi asiaa sen syvällisemmin, aihetta käsitellään kattavasti esimerkiksi kirjassa [Cie].

MÄÄRITELMÄ 14.2. — Jos $X_\alpha = X$ kaikilla $\alpha \in A$, käytetään merkintöjä

$$X^A = \prod_{\alpha \in A} X = \{\phi \colon A \to X\}$$

ja

$$x = (x(\alpha))_{\alpha \in A}\,.$$

ESIMERKKI 14.3. — (1) Jos indeksijoukko A on äärellinen, esimerkiksi $A = \{1,2\}$, niin

$$\prod_{\alpha \in \{1,2\}} X_\alpha = \{\phi \colon \{1,2\} \to A_1 \cup A_2 : \phi(1) \in A_1,\, \phi(2) \in A_2\}$$

samastuu luonnollisella tavalla tulojoukon $A_1 \times A_2$ kanssa: kuvaus $\phi \mapsto (\phi(1), \phi(2))$ on bijektio.
(2) Jos $A = \mathbb{N}$ ja $X_\alpha = X$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{N}$, niin

$$\prod_{\alpha\in\mathbb{N}} X_\alpha = X^{\mathbb{N}} = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} : x_\alpha \in X \ \forall\alpha \in \mathbb{N}\}$$

on joukon X jonojen kokoelma.

Määritelmä 14.4. — Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot (X_α, τ_α) topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in A$. Tulojoukon $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *tulotopologia* on se topologia, jonka kanta on

$$\left\{ \prod_{\alpha\in A} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha,\ \#\{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\} < \infty \right\}.$$

Käytämme tuloavaruudessa aina tulotopologiaa ellei muuta erityisesti mainita.

Lemma 14.5. — *Kokoelma*

$$\left\{ p_{\alpha_0}^{-1}(U) : U \in \tau(X_{\alpha_0}),\ \alpha_0 \in A \right\}.$$

on tuloavaruuden $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ topologian esikanta. □

Esimerkki 14.6. — (1) Jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia, niin

$$\{U \times V : U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y\}.$$

on niiden tuloavaruuden $X \times Y$ tulotopologian kanta.
(2) $[0,1]^{\mathbb{N}}$ on *Hilbertin kuutio.* Hilbertin kuution osajoukko $]0,1[^{\mathbb{N}}$ ei ole avoin koska mikään sen projektioista ei ole koko $[0,1]$. Itse asiassa harjoituksissa osoitetaan, että joukko $[0,1]^{\mathbb{N}} -]0,1[^{\mathbb{N}}$ on tiheä Lemman 10.11 nojalla. Toisaalta myös $]0,1[^{\mathbb{N}}$ on tiheä.

Propositio 14.7. — *Olkoon $A \neq \emptyset$ ja olkoot X_α topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in A$. Tulotopologia on joukon $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ karkein topologia, jonka suhteen kaikki projektiokuvaukset $p_\alpha\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\alpha$ ovat jatkuvia.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 14.8. — *Olkoon $J \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot X_α topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in J$. Olkoon X topologinen avaruus. Kuvaus $f\colon X \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ on jatkuva, jos ja vain jos kuvaukset $p_\alpha \circ f\colon X \to X_\alpha$ ovat jatkuvia kaikilla $\alpha \in J$.*

Todistus. Jos f on jatkuva, niin $p_\alpha \circ f$ on jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena jatkuva jokaisella $\alpha \in A$.

Oletetaan sitten, että kuvaukset $p_\alpha \circ f\colon X \to X_\alpha$ ovat jatkuvia kaikilla $\alpha \in J$. Jos $A = U_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha\in J-\{\alpha_0\}} X_\alpha = p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ jollain avoimella $U_{\alpha_0} \subset X_{\alpha_0}$, niin

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})) = (p_{\alpha_0} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_0})$$

on avoin. Siis kaikkien esikannan alkioiden alkukuvat ovat avoimia, joten f on jatkuva Proposition 13.19 nojalla. □

Propositiot 14.4 ja 14.5 ovat perusteita sille, miksi tulotopologia määritellään juuri sillä tavalla kuin se määritellään. Osoitamme seuraavaksi, että tuloavaruuden muodostamiseen käytettyjen topologisten avaruuksien hyvät ominaisuudet periytyvät tuloavaruuteen.

Lause 14.9. — *Olkoot X_α topologisia avaruuksia, kun $\alpha \in J$. Tällöin*

(1) jos avaruudet X_α ovat Hausdorffin avaruuksia, niin $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ on Hausdorffin avaruus.

(2) jos avaruudet X_α ovat separoituvia ja J on numeroituva, niin $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ on separoituva.

(3) jos avaruudet X_α ovat metristyviä ja J on numeroituva, niin $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ on metristyvä.

Todistus. Väite (1) jätetään harjoitustehtäväksi.
(2) Olkoon $Q_\alpha \subset X_\alpha$ numeroituva tiheä osajoukko jokaisella $\alpha \in A$. Olkoon $c_\alpha \in Q_\alpha$ jokin piste jokaisella $\alpha \in J$. Määritellään jokaiselle äärelliselle osajoukolle $I \subset J$

$$Q_I = \prod_{\alpha\in I} Q_\alpha \times \prod_{J-I} \{c_\alpha\} .$$

Joukko Q_I on numeroituva jokaisella tällaisella I, joten joukko

$$Q = \bigcup_{\substack{I\subset J\\ \#I<\infty}} Q_I$$

on numeroituva koska numeroituvan joukon äärellisten osajoukkojen perhe on numeroituva.

Olkoon $V \subset \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ joukon $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ tulotopologian kannan alkio. Tällöin on äärellinen $J_0 \subset J$ ja avoimet joukot $U_\alpha \subset X_\alpha$ kaikille $\alpha \in J_0$, joille $V = \prod_{\alpha\in J_0} U_\alpha \times \prod_{J-J_0} X_\alpha$. Lemman 10.11 nojalla $U_\alpha \cap Q_\alpha \neq \emptyset$ kaikilla $\alpha \in J_0$, joten $V \cap Q \supset V \cap Q_{J_0} \neq \emptyset$. Siis Q on tiheä Lemman 13.3 nojalla.
(3) Voimme olettaa, että $J = \mathbb{N} - \{0\}$. Harjoitustehtävän 2.4 nojalla voimme olettaa, että avaruuden X_α metriikka on rajoitettu ja että $\operatorname{diam} X_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{N} - \{0\}$. Lauseke

$$d(x, y) = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}-\{0\}} d_\alpha(x(\alpha), y(\alpha)) \tag{14.1}$$

ei saa negatiivisia arvoja ja se on äärellinen, koska $d_\alpha(x(\alpha), y(\alpha)) \to 0$, kun $\alpha \to \infty$. Harjoituksissa tarkastamme, että d on metriikka tuloavaruudessa $\prod_{\alpha=1}^\infty X_\alpha$.

Olkoon $a \in \prod_{\alpha=1}^\infty X_\alpha$ Tällöin

$$B\Big(a, \frac{1}{n}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} B\Big(a(\alpha), \frac{1}{n}\Big) ,$$

mutta $B\Big(a(\alpha), \frac{1}{n}\Big) = X_\alpha$ kaikille $\alpha \geq n$, joten

$$B\Big(a, \frac{1}{n}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{n-1} B\Big(a(\alpha), \frac{1}{n}\Big) \times \prod_{\alpha=n}^{\infty} X_\alpha .$$

Siis pallot $B(a, \frac{1}{n})$ muodostavat tulotopologian ympäristökannan jokaisessa pisteessä $a \in \prod_{\alpha=1}^\infty X_\alpha$, joten metriikan d metrinen topologia on tulotopologia. □

Esimerkki 14.10. — Lauseen 14.6 nojalla Hilbertin kuutio on separoituva ja metristyvä. Erityisesti se on Hausdorffin avaruus ja N_1-avaruus.

Propositio 14.11. — *Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot X_α topologisia avaruuksia. Olkoon $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Tuloavaruuden X jono $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteeseen $x \in X$, jos ja vain jos $p_\alpha(x_k)$ suppenee pisteeseen $p_\alpha(x)$ kaikilla $\alpha \in A$.*

Todistus. Oletetaan, että $x_k \to x$, kun $k \to \infty$. Olkoon $\alpha_0 \in A$ ja olkoon $U \in \tau(X_{\alpha_0})$ pisteen $p_{\alpha_0}(x)$ ympäristö avaruudessa X_{α_0}. Joukko

$$\widetilde{U} = U \times \prod_{\alpha \in A - \{\alpha_0\}} X_\alpha \in \tau(X)\,,$$

joten on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in \widetilde{U}$, kun $k \geq N$. Erityisesti siis $p_{\alpha_0}(x_k) \in U$, kun $k \geq N$. Siis $p_\alpha(x_k) \to p_\alpha(x)$ kaikilla $\alpha \in A$, kun $k \to \infty$.

Oletetaan sitten, että jokaisella $\alpha \in A$ on $x_\alpha \in X_\alpha$ siten, että $p_\alpha(x_k) \to x_\alpha$, kun $k \to \infty$. Olkoon $x \in X$ siten, että $p_\alpha(x) = x_\alpha$ jokaisella $\alpha \in A$. Olkoon U pisteen x ympäristö avaruudessa X. Tällöin on avaruuden X tulotopologian kannan alkio V, jolle pätee $x \in V \subset U$. Määritelmän nojalla on äärellinen $J \subset A$ ja avoimet joukot $V_j \subset X_j$ siten, että

$$V = \Big(\prod_{j \in J} V_j\Big) \times \prod_{\alpha \in A - J} X_\alpha\,.$$

Oletuksen mukaan jokaisella $j \in J$ on $N(j) \in \mathbb{N}$ siten, että $p_j(x_k) \in V_j$, kun $k \geq N(j)$, joten $x_k \in V \subset U$, kun $k \geq \max_{j \in J} N(j)$. Siis $x_k \to x$, kun $k \to \infty$. □

Oletetaan, että $X_\alpha = X$ jokaisella $\alpha \in A$. Tuloavaruuden $X^A = \prod_{\alpha \in A} X$ alkio on kuvaus $x \colon A \to X$. Proposition 14.8 nojalla avaruuden X^A jono (x_k) suppenee tulotopologiassa kohti alkiota x, jos ja vain jos

$$x_k(a) = E_a(x_k) \to E_a(x) = x(a)$$

kaikilla $a \in A$. Tulotopologia on siis pisteittäisen suppenemisen topologia.

Lause 14.12. — *Olkoot X_k kompakteja metristyviä avaruuksia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin tuloavaruus $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ on kompakti metristyvä avaruus.*

Todistus. Riittää tarkastella tapausta, että X_k on rajoitettu metrinen avaruus jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja $\operatorname{diam} X_k \to 0$, kun $k \to \infty$. Lauseen 14.6(3) nojalla X on tällöin metrinen avaruus. Osoitetaan X jonokompaktiksi diagonaalitodistuksella, joka käyttää Propositiota 14.8. Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono avaruudessa X. Jonolla $(p_1(x_k))_{k=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono $(p_1(x_{1k}))_{k=1}^{\infty}$ koska X_1 on kompakti. Tarkastellaan seuraavaksi jonon $(x_{1k})_{k=1}^{\infty}$ projektiota avaruuteen X_2 ja niin edelleen. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. □

Esimerkki 14.13. — (1) Hilbertin kuutio $[0,1]^{\mathbb{N}}$ on kompakti Lauseen 14.9 nojalla.
(2) Tulojoukon $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *laatikkotopologia* on topologia τ_{box}, jonka kanta on

$$\left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \tau(X_\alpha) \right\}.$$

Laatikkotopologia on aidosti hienompi kuin tulotopologia, jos indeksijoukko A on ääretön.

Olkoot X_k kompakteja metristyviä avaruuksia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tuloavaruus $\prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$ on kompakti metristyvä avaruus Proposition 14.9 nojalla, ja metristyvänä avaruutena siis Hausdorffin avaruus. Topologinen avaruus $(\prod_{k \in \mathbb{N}} X_k, \tau_{\text{box}})$ on Hausdorffin avaruus, koska laatikkotopologia on hienompi kuin tulotopologia. Harjoitustehtävän 11.10 nojalla $(\prod_{k \in \mathbb{N}} X_k, \tau_{\text{box}})$ ei ole kompakti. Laatikkotopologiassa on siis tämän havainnon mukaan turhan paljon avoimia joukkoja.

Esimerkki 14.14. — Olkoon

$$X = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{R}} : \{\alpha \in \mathbb{R} : x_\alpha = 1\} \text{ on numeroituva}\} \subset \{0,1\}^{\mathbb{R}}$$

varustettuna tulotopologian indusoimalla topologialla. Hausdorffin avaruuksien tulotopologia on Lauseen 14.6 nojalla Hausdorffin avaruus. Harjoitustehtävän 9.7 nojalla X on Hausdorffin avaruus.

Joukko

$$\widetilde{U}_\alpha = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{R}} : x(\alpha) = 0\} = p_\alpha^{-1}(\{0\})$$

on tulotopologian esikannan alkiona avoin jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$. Siis joukot

$$U_\alpha = \{x \in X : x(\alpha) = 0\} = X \cap \widetilde{U}_\alpha$$

ovat avoimia kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Kokoelma $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ on avaruuden X peite, koska jokaisella $x \in X$ on $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että $x(\alpha) = 0$. Tällä peitteellä ei ole äärellistä osapeitettä, koska jokaisella äärellisellä osajoukolla $A \subset \mathbb{R}$ on $x \in X$, jolla $x(\alpha) = 1$ kaikilla $\alpha \in A$, siis $x \notin \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tämä havainto osoittaa, että X ei ole kompakti.

Osoitamme, että X on jonokompakti. Olkoon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono avaruuden X alkioita. Joukko

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R} : x_k(\alpha) = 1 \text{ jollain } k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} x_k^{-1}(1)$$

on numeroituvien joukkojen numeroituvana yhdisteenä numeroituva. Avaruus $\prod_{\alpha \in S}\{0,1\}$ on Lauseen 14.9 nojalla metristyvä ja kompakti, joten se on myös jonokompakti. Olkoon $(x_{k_n}|_S)_{n \in \mathbb{N}}$ jonon $(x_k|_S)_{k \in \mathbb{N}}$ suppeneva osajono. Huomaa, että $x_{k_n}|_{\mathbb{R}-S} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten Proposition 14.8 nojalla jono $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ on alkuperäisen jonon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppeneva osajono. Siis X on jonokompakti.

14.2 Kuvausperheen lähtötopologia

Tulotopologia on tärkein esimerkki yleisemmästä tavasta muodostaa topologia joukkoon $X \neq \emptyset$ kuvausperheen avulla.

Määritelmä 14.15. — Olkoon $X \neq \emptyset$. Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot (Y_α, τ_α) topologisia avaruuksia. Olkoot $f_\alpha \colon X \to Y_\alpha$ kuvauksia. Kokoelman $\{f_\alpha^{-1}(U) : U \in \tau_\alpha, \alpha \in A\}$ virittämä topologia τ^{i} joukossa X on *kuvausperheen* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indusoima topologia* eli *lähtötopologia*.

Lemma 14.16. — *Kuvaukset* $f_\alpha \colon (X, \tau^{\mathrm{i}}) \to Y_\alpha$ *ovat jatkuvia kaikilla* $\alpha \in A$.

Propositio 14.17. — *Kuvausperheen* $f_\alpha \colon X \to (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ *indusoima topologia on joukon* X *karkein topologia, jonka suhteen kaikki kuvaukset* f_α *ovat jatkuvia.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 14.18. — *Tulotopologia on projektioiden perheen lähtötopologia.* □

14.3 Tihonovin lause

Tässä luvussa yleistämme Lauseen 14.9 yleisen tulon tapaukseen. Tällöin tuloavaruus ei yleensä ole metristyvä avaruus, joten numeroituvan tulon tapauksen todistuksen idea ei ole käytettävissä. Todistus vaatii valinta-aksiooman käyttöä jossain muodossa, käytämme sen kanssa yhtäpitävää muotoilua, jota kutsutaan usein Zornin lemmaksi.

MÄÄRITELMÄ 14.19. — Olkoon $J \neq \emptyset$. Relaatio $\preceq$ on *järjestys* joukossa J, jos

(1) $a \preceq a$ kaikilla $a \in J$,

(2) jos $a \preceq b$ ja $b \preceq a$, niin $a = b$ ja

(3) jos $a \preceq b$ ja $b \leq c$, niin $a \preceq c$ kaikilla $a, b, c \in J$.

Pari $(J, \preceq)$ on *(osittain) järjestetty joukko.*

Järjestys $\preceq$ on *täydellinen*, jos kaikille $a, b \in J$ pätee $a \preceq b$ tai $b \preceq a$. Jos joukon J järjestys on täydellinen, niin $(J, \preceq)$ on *ketju.*

Alkio $Y \in J$ on osajoukon $B \subset J$ *yläraja*, jos $b \preceq Y$ kaikilla $b \in B$.

Järjestetty joukko, jonka jokaisella ketjulla on yläraja on *induktiivisesti järjestetty joukko.*

Järjestetyn joukon J alkio $M \in J$ on *maksimaalinen*, jos $M \preceq b$ vain, jos $b = M$.

LAUSE 14.20 (ZORNIN LEMMA). — *Induktiivisesti järjestetyssä joukossa on maksimaalinen alkio.*

Todistus. Katso [Cie, Thm. 4.3.4]. □

LAUSE 14.21 (TIHONOVIN LAUSE). — *Kompaktien avaruuksien tuloavaruus on kompakti.*

Tihonovin lauseen todistamista varten on kätevää todistaa joitakin aputuloksia.

MÄÄRITELMÄ 14.22. — Topologisen avaruuden X avoin peite on *hankala*,[1] jos sillä ei ole äärellistä osapeitettä.

LEMMA 14.23. — *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\mathscr{A}$ sen esikanta. Jos avaruudella X on hankala peite, niin sillä on hankala peite, jonka joukot ovat esikannan alkioita.*

Todistus. Olkoon $\mathscr{H}$ avaruuden X hankalien peitteiden kokoelma. Inkluusio $\subset$ on järjestysrelaatio joukossa $\mathscr{H}$. Olkoon $(\mathscr{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ketju järjestetyssä joukossa $(\mathscr{H}, \subset)$. Peite $\mathscr{U} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{U}_\alpha$ on hankala: Jos sillä olisi äärellinen osapeite $U_1, U_2, \ldots, U_N$, niin jokaiselle $1 \leq j \leq N$ olisi $\alpha_j \in A$, jolle $U_j \in \mathscr{U}_{\alpha_j}$. Koska $(\mathscr{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ on ketju, pätee siis $U_j \in \mathscr{U}_{\alpha_{j_0}}$ jollain $1 \leq j_0 \leq N$. Mutta tällöin peitteellä $\mathscr{U}_{\alpha_{j_0}}$ olisi äärellinen osapeite vastoin oletusta. Siis $\mathscr{U}$ on ketjun $(\mathscr{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ yläraja.

Zornin lemman nojalla järjestetyssä joukossa $\mathscr{H}$ on maksimaalinen alkio $\widehat{\mathscr{U}}$. Osoitetaan, että $\widehat{\mathscr{U}} \cap \mathscr{A}$ on hankala peite.

Olkoon $x \in X$. Koska $\widehat{\mathscr{U}}$ on peite, on $U \in \widehat{\mathscr{U}}$, jolle $x \in U \in \widehat{\mathscr{U}}$. Koska $\mathscr{A}$ on esikanta, on $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathscr{A}$, joille $x \in V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \subset U$. Tällöin $V \in \widehat{\mathscr{U}}$, sillä muuten

[1] Tämä on kätevä määritelmä tässä tilanteessa mutta ei liene yleisesti käytössä.

peitteellä $\widehat{\mathscr{U}} \cup \{V\}$ on äärellinen osapeite. Tämä on mahdotonta koska $V \subset U$ ja $\widehat{\mathscr{U}}$ on hankala. Osoitetaan seuraavaksi, että $V_i \in \widehat{\mathscr{U}}$ jollain $1 \leq i \leq n$.

Tätä varten teemme pienen havainnon maksimaalisesta hankalasta peitteestä $\widehat{\mathscr{U}}$. Jos W ja W' ovat avoimia joukkoja ja $W, W' \notin \widehat{\mathscr{U}}$, peitteillä $\widehat{\mathscr{U}} \cup \{W\}$ ja $\widehat{\mathscr{U}} \cup \{W'\}$ on äärelliset osapeitteet $\{W, U_1, \ldots, U_n\}$ ja $\{W', U_1', \ldots, U_m'\}$. Tällöin $\{W \cap W', U_1, \ldots, U_n, U_1', \ldots, U_m'\}$ on peitteen $\widehat{\mathscr{U}} \cup \{W \cap W'\}$ äärellinen osapeite, joten $W \cap W' \notin \widehat{\mathscr{U}}$.

Kun sovellamme edellä tehtyä havaintoa joukkoihin $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \widehat{\mathscr{U}}$, pätee joko $V_n \in \widehat{\mathscr{U}}$ tai $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1} \in \widehat{\mathscr{U}}$ ja toistamalla tämä päättely korkeintaan $n-1$ kertaa saadaan $V_i \in \widehat{\mathscr{U}}$ jollain $1 \leq i \leq n$. Koska $x \in V \subset V_i$, on siis osoitettu, että $\widehat{\mathscr{U}} \cap \mathscr{A}$ on peite. Koska $\widehat{\mathscr{U}}$ on hankala ja $\widehat{\mathscr{U}} \cap \mathscr{A} \subset \widehat{\mathscr{U}}$, myös peite $\widehat{\mathscr{U}} \cap \mathscr{A}$ on hankala. $\square$

Tihonovin lauseen todistus. Olkoot (X_α, τ_α) kompakteja topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in A$. Jos tuloavaruus $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ei ole kompakti, niin sillä on hankala peite $\mathscr{U}$, jonka joukot ovat esikannan

$$\mathscr{A} = \left\{p_{\alpha_0}^{-1}(U) : U \in \tau(X_{\alpha_0}),\ \alpha_0 \in A\right\}.$$

alkioita.

Olkoon $\alpha \in A$. Kokoelma

$$\mathscr{U}_\alpha = \{V \in \tau_\alpha : p_\alpha^{-1}(V) \in \mathscr{U}\}.$$

ei ole avaruuden X_α peite. Nimittäin, jos se olisi peite, niin sillä olisi äärellinen osapeite $\{V_1, V_2, \ldots, V_N\}$ ja tällöin kokoelma $\{p_\alpha^{-1}(V_1), p_\alpha^{-1}(V_2), \ldots, p_\alpha^{-1}(V_N)\}$ olisi hankalan peitteen $\mathscr{U}$ äärellinen osapeite, mikä on mahdotonta.

Jokaisella $\alpha \in A$ on siis $x_\alpha \in X_\alpha - \bigcup_{U \in \mathscr{U}_\alpha} U$. Olkoon $x \in X$ se alkio, jolle pätee $x(\alpha) = x_\alpha$ kaikilla $\alpha \in A$. Koska $\mathscr{U}$ on peite, on $U \in \mathscr{U}$, jolle $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in U$. Tällöin $U = p_{\alpha_0}^{-1}(U_0)$ jollain $U_0 \in \mathscr{U}_{\alpha_0}$, joten $x_{\alpha_0} \in U_0 \in \mathscr{U}_{\alpha_0}$, mikä on ristiriita. $\square$

Esimerkki 14.24. — Tihonovin lauseen nojalla avaruus $[0,1]^{[0,1]}$ on kompakti ja Lauseen 14.6(1) nojalla se on Hausdorffin avaruus. Osoitamme, että $[0,1]^{[0,1]}$ ei ole jonokompakti: Jokainen $x \in [0,1]$ voidaan esittää sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{2^k}$$

summana, missä $\alpha_k(x) \in \{0,1\}$.[2] Summaesityksessä esiintyvät kertoimet ovat nyt funktioita $\alpha_k \colon [0,1] \to [0,1]$, siis ne ovat avaruuden $[0,1]^{[0,1]}$ alkioita. Jos jonolla $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ olisi suppeneva osajono $(\alpha_{k_j})_{j \in \mathbb{N} - \{0\}}$, niin jono $(\alpha_{k_j}(x))_{j \in \mathbb{N} - \{0\}}$ suppenisi jokaiselle x. Olkoon $\beta_{k_{2j}} = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon $\beta_k = 0$ kaikilla muilla k. Tällöin

$$\alpha_{k_j}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}\Big) = \frac{1 + (-1)^j}{2}$$

ei suppene. Siis jonolla $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ ei ole suppenevaa osajonoa.

[2] Niillä numeroituvan monella positiivisella luvulla, joilla on 2-kantainen esitys, jonka kertoimet ovat jostain indeksistä alkaen nollia, on myös esitys, jonka kertoimet ovat jo edellisestä indeksistä alkaen ykkösiä. Esimerkiksi $\frac{1}{2} = \sum_{k=2} \frac{1}{2^k}$. Valitaan tällaisille luvuille toinen esityksistä. Muille luvuille 2-kantainen esitys on yksikäsitteinen.

Harjoitustehtäviä

14.1. Osoita, että suljettujen joukkojen tulo on suljettu tulovaruudessa: Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot X_α topologisia avaruuksia kaikilla $\alpha \in A$. Olkoon $F_\alpha \subset X_\alpha$ suljettu jokaisella $\alpha \in A$. Osoita, että $\prod_{\alpha\in A} F_\alpha$ on suljettu tuloavaruudessa $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

14.2. Osoita, että joukko $[0,1]^{\mathbb{N}} - \,]0,1[^{\mathbb{N}}$ on tiheä Hilbertin kuutiossa.

14.3. Olkoot X_α Hausdorffin avaruuksia, kun $\alpha \in J$. Osoita, että $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ on Hausdorffin avaruus.

14.4. Osoita, että lauseke (14.1) määrää metriikan numeroituvassa tuloavaruudessa.

14.5. Olkoot X_k kompakteja metrisiä avaruuksia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$ on kompakti metrinen avaruus.

14.6. Olkoon $\operatorname{diag}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diagonaalikuvaus $\operatorname{diag}(x)(n) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$.[3] Osoita, että $\operatorname{diag}\colon (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{E}}) \to ((\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{E}})^{\mathbb{N}}, \tau_{\text{box}})$ ei ole jatkuva.

14.7. Osoita, että joukon $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tulotopologia on sama kuin Harjoitustehtävässä 2.16 määritellyn metriikan metrinen topologia.[4]

14.8. Olkoon $e_k\colon \mathbb{N} \to [0,1]$, $e_k(n) = \delta_{kn}$. Osoita, että Hilbertin kuution $[0,1]^{\mathbb{N}}$ jono $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee.

14.9. Olkoon $e_k\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, $e_k(n) = \delta_{kn}$. Osoita, että tuloavaruuden $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jono $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee.

14.10. Todista Propositio 14.13.

[3] Siis $\operatorname{diag}(x) = (x, x, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

[4] Avoimet pallot muodostavat metrisen topologian kannan. Millaisia joukkoja avoimet pallot ovat tässä avaruudessa?

Kirjallisuutta

[Bou1] N. Bourbaki. *General topology. Chapters 1–4.* Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Bou2] N. Bourbaki. *General topology. Chapters 5–10.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1999.

[BBT] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, and B. S. Thomson. *Real analysis*. `http://classicalrealanalysis.info/`, 2nd edition, 2008.

[Cie] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Mun] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., second edition, 2000.

[Pit] C. G. C. Pitts. *Introduction to metric spaces*. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1972. `https://archive.org/details/IntroductionToMetricSpaces`.

[SV] K. Suominen and K. Vala. *Topologia I*. Limes ry, 1987.

[TBB] B. S. Thomson, J. B. Bruckner, and A. M. Bruckner. *Elementary real analysis*. `http://classicalrealanalysis.info/`, 2nd edition, 2008.

[Väi1] J. Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2007.

[Väi2] J. Väisälä. *Topologia II*. Limes ry, 1983.