Ryhmät 2021

Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Osoita, että
$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i\sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$$
on ryhmän $\mathbb{C}^\times$ aliryhmä.

Ratkaisu. Joukko $\mathbb{S}^1$ ei ole tyhjä, sillä esimerkiksi $1 \in \mathbb{S}^1$. Olkoot $z, w \in \mathbb{S}^1$. Proposition 1.22 nojalla $|zw| = |z||w| = 1$, joten $zw \in \mathbb{S}^1$. Lisäksi $z\bar{z} = \mathbf{n}(z) = |z|^2 = |\bar{z}| = 1$, joten $\bar{z} = z^{-1} \in \mathbb{S}^1$. Aliryhmätestin nojalla $\mathbb{S}^1 < \mathbb{C}^\times$.

Yhtälö $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i\sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$ on tunnettu aiemmilta kursseilta, esimerkiksi napakoordinaattien yhteydestä. Tällöinhän t on ympyrän kulmaparametri, kun kulmaa mitataan vastapäivään alkaen tason pisteestä $(1, 0) = 1 + 0i$.

2. Anna esimerkki surjektiivisesta homomorfismista $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$.

Ratkaisu. Kuvaus $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 < \mathbb{C}^\times$, $\phi(t) = \cos(t) + i\sin(t)$, on surjektio Harjoitustehtävän 1 nojalla. Lisäksi kaikille $s, t \in \mathbb{R}$ pätee trigonometristen funktioiden tunnettujen yhteenlaskusääntöjen nojalla
$$\phi(s+t) = \cos(s+t)+i\sin(s+t) = \cos(s)\cos(t)-\sin(s)\sin(t)+i\big(\cos(s)\sin(t)+\sin(s)\cos(t)\big)\,.$$
Toisaalta kompleksilukujen laskusääntöjen nojalla
$$\begin{aligned}\phi(s)\phi(t) &= \big(\cos(s) + i\sin(s)\big)\big(\cos(t) + i\sin(t)\big)\\ &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) + i\big(\cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)\big)\,,\end{aligned}$$
joten väite on todistettu.
Huomaa: Edellä käytetty ϕ ei ole ainoa oikea valinta surjektiiviseksi homomorfismiksi $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$. Samalla laskulla kuin edellä on helppo tarkastaa, että kuvaus $\phi_a : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$, $\phi_a(t) = \cos(at) + i\sin(at)$, on surjektiivinen homomorfismi kaikilla $a \in \mathbb{R}^\times$. Erityisen luonteva valinta olisi $a = 2\pi$.

3. Osoita, että ryhmä H_3 ei ole isomorfinen ryhmän $(\mathbb{R}^3, +)$ kanssa.

Ratkaisu. Jos ryhmät olisivat isomorfisia, niin H_3 olisi kommutatiivinen Proposition 1.10 nojalla, koska $\mathbb{R}^3$ on kommutatiivinen esimerkiksi proposition 8.12 nojalla. Kuitenkin pätee esimerkiksi
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,$$
joten H_3 ei ole kommutatiivinen.

4. Olkoon G ryhmä. Osoita, että $Z(G) \leqslant G$.

Ratkaisu. Neutraalialkio on keskuksessa, joten $Z(G)$ ei ole tyhjä. Olkoot $z, w \in Z(G)$. Tällöin assosiatiivisuuden ja keskuksen määritelmän nojalla kaikille $g \in G$ pätee

$$(zw)g = z(wg) = z(gw) = (zg)w = (gz)w = g(zw)\,,$$

joten $zw \in Z(G)$. Lisäksi Proposition 8.4(4) ja oletuksen $z \in Z(G)$ nojalla saadaan

$$z^{-1}g = (g^{-1}z)^{-1} = (zg^{-1})^{-1} = gz^{-1}\,,$$

joten $z^{-1} \in Z(G)$. Aliryhmätestin nojalla $Z(G) \leqslant G$.

5. Todista Propositio 9.11(2).

Ratkaisu. Olkoot $e \in G$ ja $e' \in G'$ ryhmien G ja G' neutraalialkiot. Olkoon $H' \leqslant G'$. Tällöin $e' \in H'$ ja $\phi(e) = e'$, joten $e \in \phi^{-1}(H')$. Olkoot $g, h \in \phi^{-1}(H')$. Tällöin siis $\phi(g), \phi(h) \in H'$. Proposition 8.17 nojalla

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(g)\phi(h)^{-1} \in H'\,,$$

koska $H' \leqslant G'$. Aliryhmätestin nojalla $\phi^{-1}(H') \leqslant G$.

6. Todista Propositio 9.15.

Ratkaisu. Ryhmän G neutraalialkio on aliryhmässä H_i jokaisella $i \in I$, joten $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \varnothing$. Olkoot $g, h \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Tällöin $g, h \in H_i$ kaikilla $i \in I$, joten $gh^{-1} \in H_i$ kaikilla $i \in I$. Siis $gh^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Väite seuraa aliryhmätestistä.

7. Todista Propositio 9.20.

Ratkaisu. Olkoon $G = \langle S \rangle$ ryhmä. Jokaiselle $g \in G$ on $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ siten, että $g = s_1 s_2 \cdots s_n$. Tällöin homomorfisuutta ja oletusta käyttämällä saadaan

$$\phi(g) = \phi(s_1)\phi(s_2)\cdots\phi(s_n) = \psi(s_1)\psi(s_2)\cdots\psi(s_n) = \psi(g)\,.$$

Siis $\phi = \psi$.

8. Osoita, että $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times$ ja $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$ ovat syklisiä ryhmiä.

Ratkaisu. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times = \{1 + 6\mathbb{Z}, 5 + 2\mathbb{Z}\} = \langle 5 + 6\mathbb{Z} \rangle$, sillä $(5 + 6\mathbb{Z})^2 = 1 + 6\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times = \{1 + 10\mathbb{Z}, 3 + 10\mathbb{Z}, 7 + 10\mathbb{Z}, 9 + 10\mathbb{Z}\}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}(3 + 10\mathbb{Z})^2 &= 9 + 10\mathbb{Z} = -1 + 10\mathbb{Z}\\ (3 + 10\mathbb{Z})^3 &= -3 + 10\mathbb{Z} = 7 + 10\mathbb{Z} \text{ ja}\\ (3 + 10\mathbb{Z})^4 &= 1 + 10\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Siis $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times = \langle 3 + 10\mathbb{Z} \rangle$.