Algebra 1A: Ryhmät

Tentti 15.5.2019

Muista perustella vastauksesi huolellisesti!

1. (a) Olkoon $\sigma\colon \{1,2,\dots,7\} \to \{1,2,\dots,7\}$ permutaatio, jolle pätee

$$\sigma(1)=3,\quad \sigma(2)=2,\quad \sigma(3)=4,\quad \sigma(4)=7,\quad \sigma(5)=6,\quad \sigma(6)=5,\quad \sigma(7)=1\,.$$

Kirjoita permutaatio σ erillisten syklien tulona.

(b) Olkoot $\alpha=(26345)$ ja $\beta=(1753)$. Kirjoita permutaatio $\alpha^{-1}\beta$ erillisten syklien tulona.

2. (a) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ja S_3 isomorfisia?[1]

(b) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ja $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ isomorfisia?

(c) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ja $\{1,i,-1,-i\} \le \mathbb{C}^\times$ isomorfisia?

Olkoon G ryhmä. Jos $\alpha\colon G\to G$ on isomorfismi, niin α on ryhmän G AUTOMORFISMI. Ryhmän G AUTOMORFISMIRYHMÄ on

$$\mathrm{Aut}(G) = \Big(\{\alpha\colon G\to G : \alpha \text{ on automorfismi}\}, \circ\Big)\,.$$

Oletamme tunnetuksi, että kuvausten yhdistäminen on laskutoimitus automorfismien joukossa ja että $\mathrm{Aut}\,G$ on ryhmä.

3. Olkoon G ryhmä.

(a) Olkoon $a\in G$. Osoita, että kuvaus $\phi_a\colon G\to G$,

$$\phi_a(g) = aga^{-1}\,,$$

on automorfismi.

(b) Olkoon

$$\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_a : a\in G\} \subset \mathrm{Aut}(G)\,.$$

Osoita, että $\mathrm{Inn}(G) \le \mathrm{Aut}(G)$.

(c) Osoita, että kuvaus $\rho\colon G\to \mathrm{Inn}(G)$, $\rho(a)=\phi_a$, on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on ryhmän G keskus $Z(G)$.[2]

(d) Mitä voit päätellä ryhmien ensimmäisen isomorfismilauseen avulla tässä tehtävässä esiintyvien ryhmien suhteesta?

4. Olkoon p alkuluku.

(a) Olkoon C syklinen ryhmä, jonka kertaluku on p^n jollain positiivisella kokonaisluvulla n. Osoita, että ryhmässä C on alkio, jonka kertaluku on p.[3]

(b) Olkoon G ryhmä, jonka kertaluku on p^m jollain positiivisella kokonaisluvulla m. Osoita, että ryhmässä G on alkio, jonka kertaluku on p.

Tehtävien pisteytys: 4+6+8+6=24

[1] S_3 on joukon $\{1,2,3\}$ permutaatioiden ryhmä.
[2] Muista, että ryhmän G keskus on $Z(G)=\{z\in G : zg=gz \text{ kaikilla } g\in G\}$.
[3] Ryhmän kertaluku on sen alkioiden lukumäärä. Alkion h kertaluku on syklisen ryhmän $\langle h\rangle$ kertaluku.