Ryhmät 3.5.2021

13. Ryhmät ja geometria.

$X \neq \emptyset \rightsquigarrow \mathrm{Perm}(X) = (\{ f : X \circlearrowleft \text{ bijektio} \}, \circ)$

lisätään rakennetta $\rightsquigarrow$ siirrytään tark. kuvauksiin, jotka ovat yhteensopivia lisätyn rakenteen kanssa.

$X \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ vektoriavaruus

Tark. $\mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$ aliryhmää $GL(\mathbb{R}^n) = \{ L \in \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n) : L \text{ lin. kuvaus} \}$

$= \{ \text{lin. bijektiot } \mathbb{R}^n \circlearrowleft \}$.

$\cong GL_n(\mathbb{R}) = \{ \text{kääntyvät } n \times n\text{-matriisit} \}$.

$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, (\cdot | \cdot), \| \cdot \|)$

sisätulo $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (= x \cdot y \text{ pistetulo})$

$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

1

${}^tA$ on A:n transpoosi.

$\mathbb{E}^n$:n **ortogonaaliryhmä** on

$$O(n) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) : {}^tA A = I_n \}$$

ja sen **erityinen ortogonaaliryhmä** on

$$SO(n) = \{ A \in O(n) : \det(A) = 1 \}.$$
$$= \ker(\det|_{O(n)})$$

LAG: $A \in O(n)$
$\Rightarrow \det A \in \{1,-1\}$

$\det({}^tA) = \det A$

$$1 = \det I_n = \det({}^tA A) = \underbrace{\det({}^tA)}_{\det A} \det(A) = (\det A)^2$$

$\Rightarrow \det A \in \{1,-1\}$.

Lemma. $O(n) < GL_n(\mathbb{R})$.

Tod. $I_n \in O(n)$ koska ${}^tI_n = I_n$ ja $(I_n)^2 = I_n$.

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. Jos $A, B \in O(n)$, niin

$${}^t(AB)AB = {}^tB \underbrace{{}^tA A}_{=I_n} B = {}^tB B = I_n. \Rightarrow \underline{\underline{AB \in O(n)}}$$

$${}^tA A = I_n \iff \underline{\underline{A^{-1} = {}^tA}}. \iff {}^t(A^{-1}) = A$$

$${}^t(A^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n. \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$$

Aliryhmätesti (Prop. 9.3)

Huom $O(2) \neq GL_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$[O(n):SO(n)] = 2$:

Äsken näimme, että $\det(O(n)) = \{-1,1\} < \mathbb{R}^\times$

$\Rightarrow \det : O(n) \to \{-1,1\}$ on surj. homomorfismi.

Ryhmien 1. isom. lause (L. 12.17):

$$\#(O(n)/SO(n)) = 2$$

$$\begin{tikzcd} & O(n) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\det"] & \\ O(n)/SO(n) \arrow[rr, "\cong"'] & & \{-1,1\} \end{tikzcd}$$

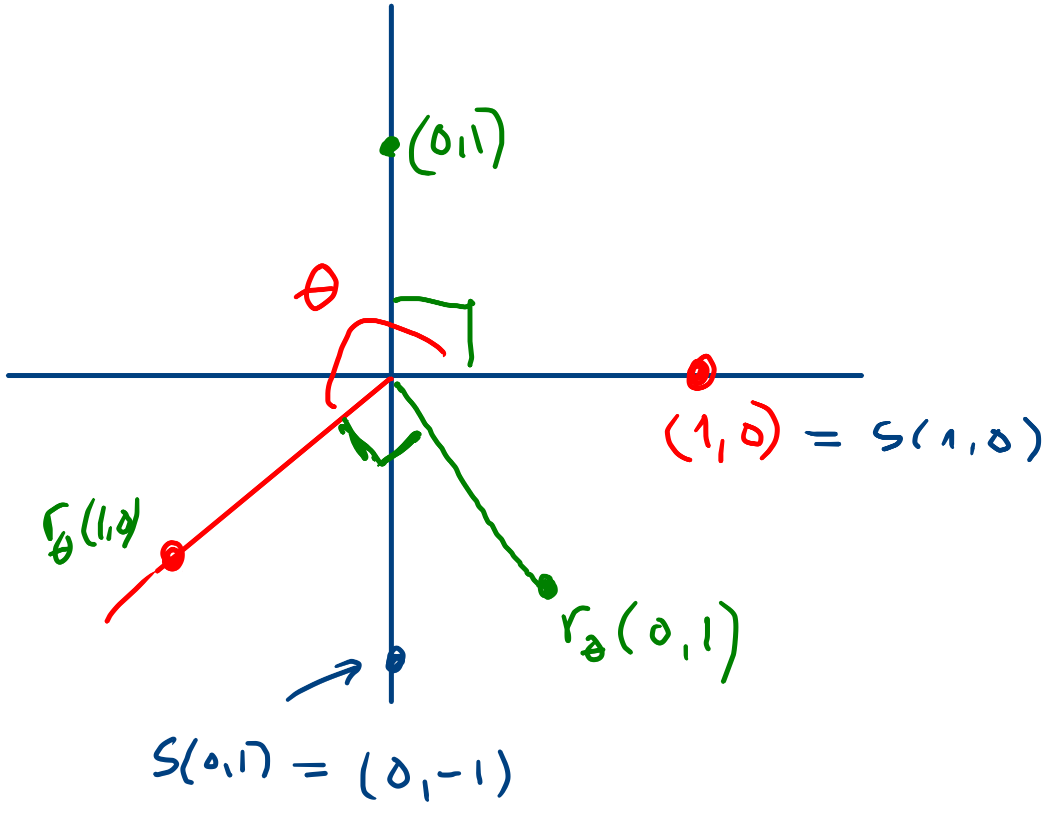
Lemma. Jos $A \in O(n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, niin $(Ax \mid Ay) = (x \mid y)$.

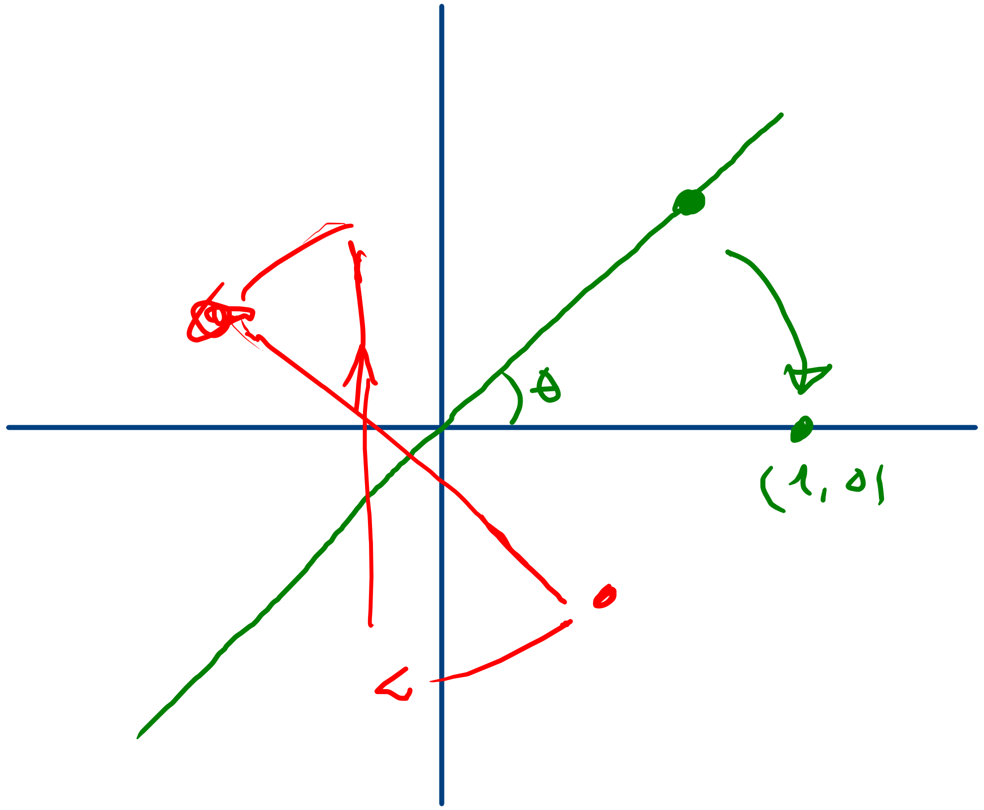
$$(Ax \mid Ay) = {}^t(Ax)\,Ay = {}^tx\,\underbrace{{}^tA\,A}_{=I_n}\,y = (x \mid y)$$

Esim. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2) - SO(2)$ ← peilaus x_1-akselissa.

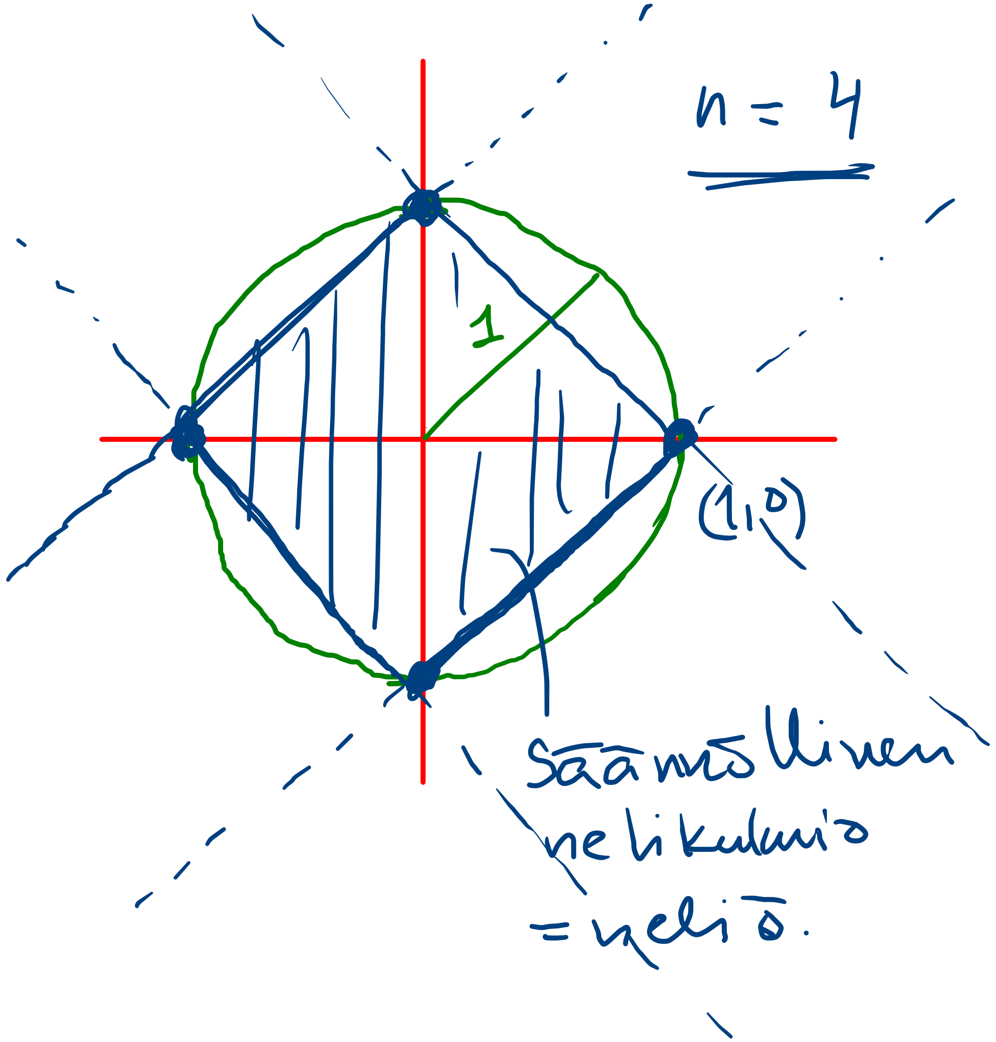
kierto kulman θ verran.

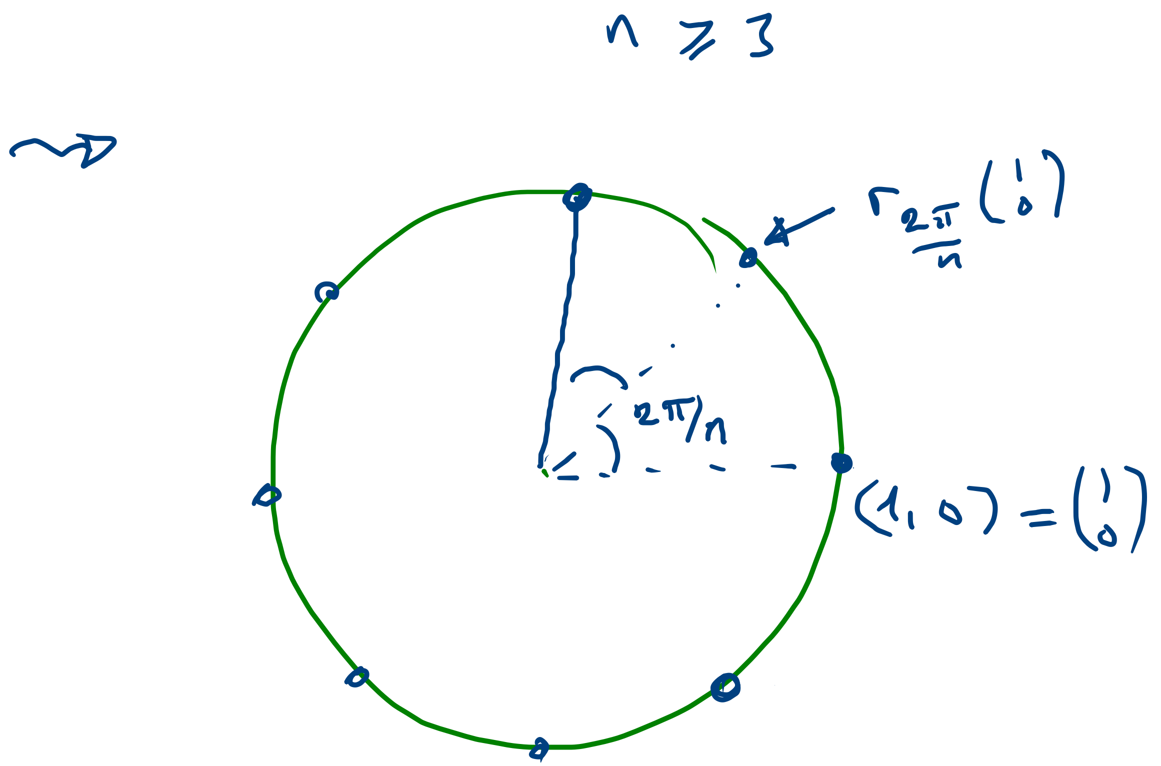
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}^{\theta}}_{r_\theta \in SO(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \quad \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$$





$r_\theta s r_\theta^{-1}$ pitää suoran $r_\theta(x_1\text{-akseli})$ pisteet paikallaan ja peilaa muut tämän suoran yli.





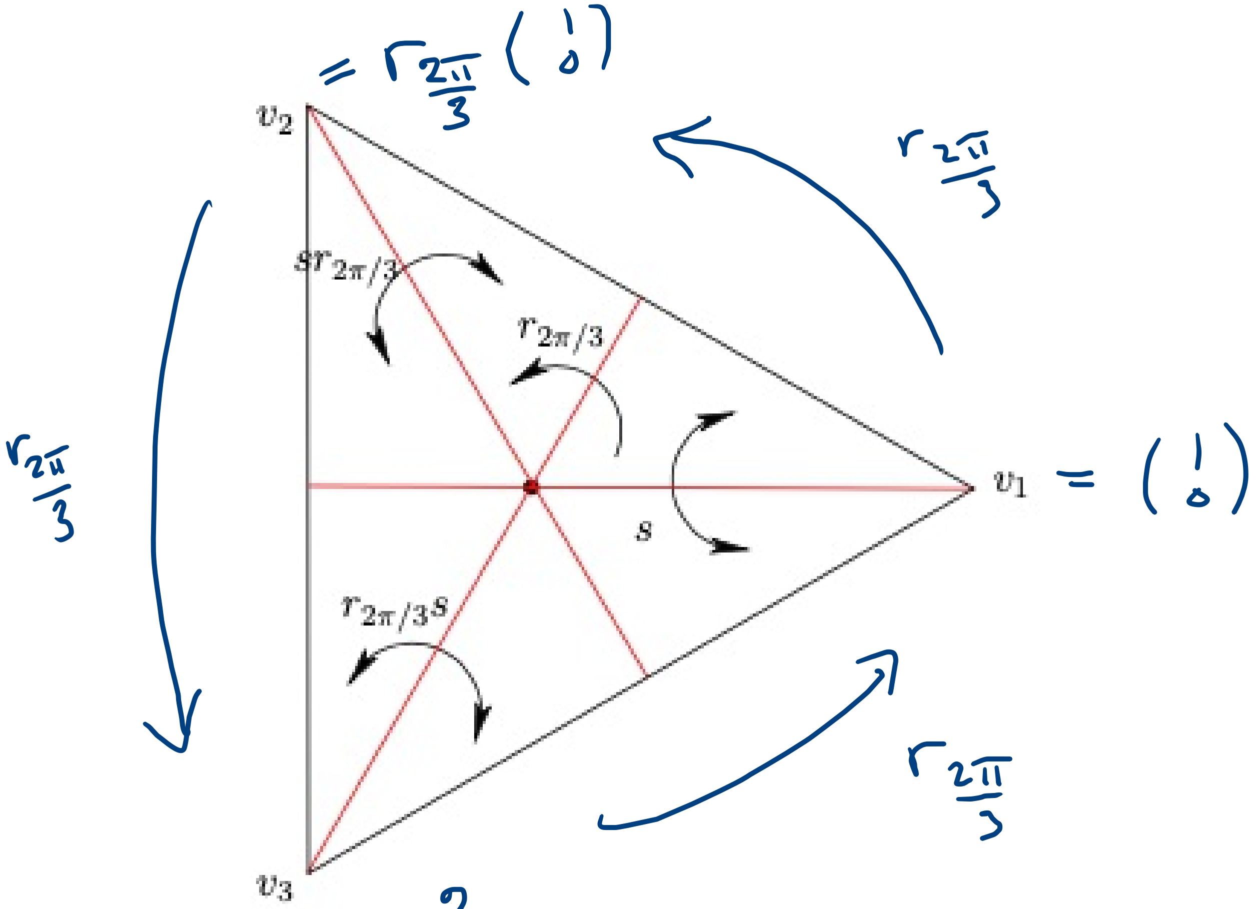
Säännöllinen n-kulmio P_n

$$D_n = \{ A \in O(2) : \overset{(*)}{AP_n = P_n} \}$$

diedriryhmä eli 2-tahokasryhmä.

(*) $AP_n = \{ Ax : x \in P_n \}$

$= A(P_n)$, kun ajatellaan A lin. kuvauksena.



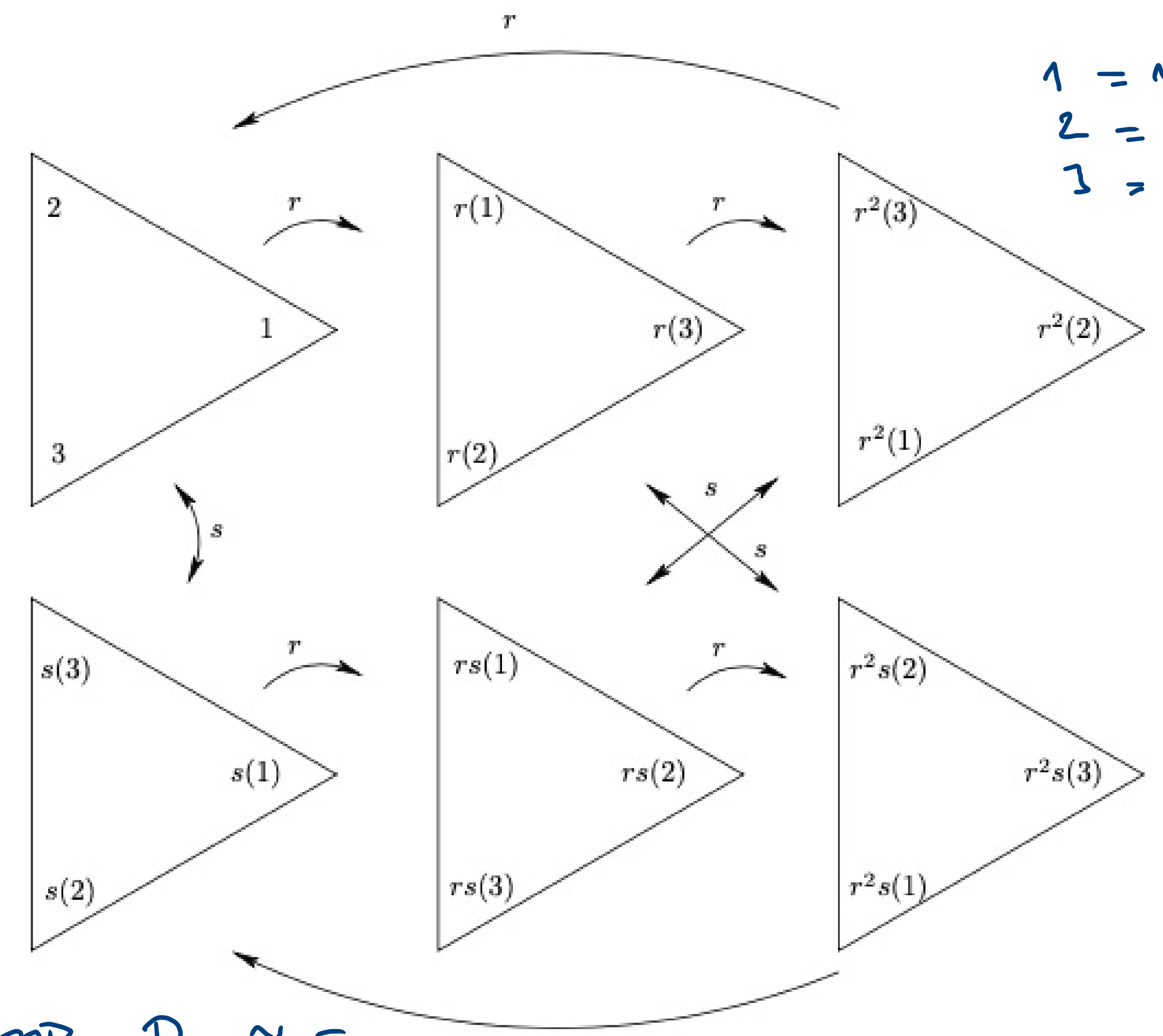
$= r^2_{\frac{2\pi}{3}}\binom{1}{0} = r_{\frac{2\pi}{3}}(v_2)$

$= r^{-1}_{\frac{2\pi}{3}} = r_{-\frac{2\pi}{3}}$

P_n:n kärkien joukko $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
ryhmän D_n alkio määrää joukon
$\{v_1, \dots, v_n\}$ permutaation.

$r = r_{\frac{2\pi}{3}}$

$1 = v_1$
$2 = v_2$
$3 = v_3$



$r \rightsquigarrow (1\,2\,3)$

$s \rightsquigarrow (2\,3)$

inj. $\rightsquigarrow$ homomorfismi $\rho : D_3 \to S_3$ $\rightsquigarrow$ $\underline{D_3 \cong S_3}$

Lemma. 1) $D_n \leq O(2)$ Harj.

2) $D_n = \langle s, r_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$

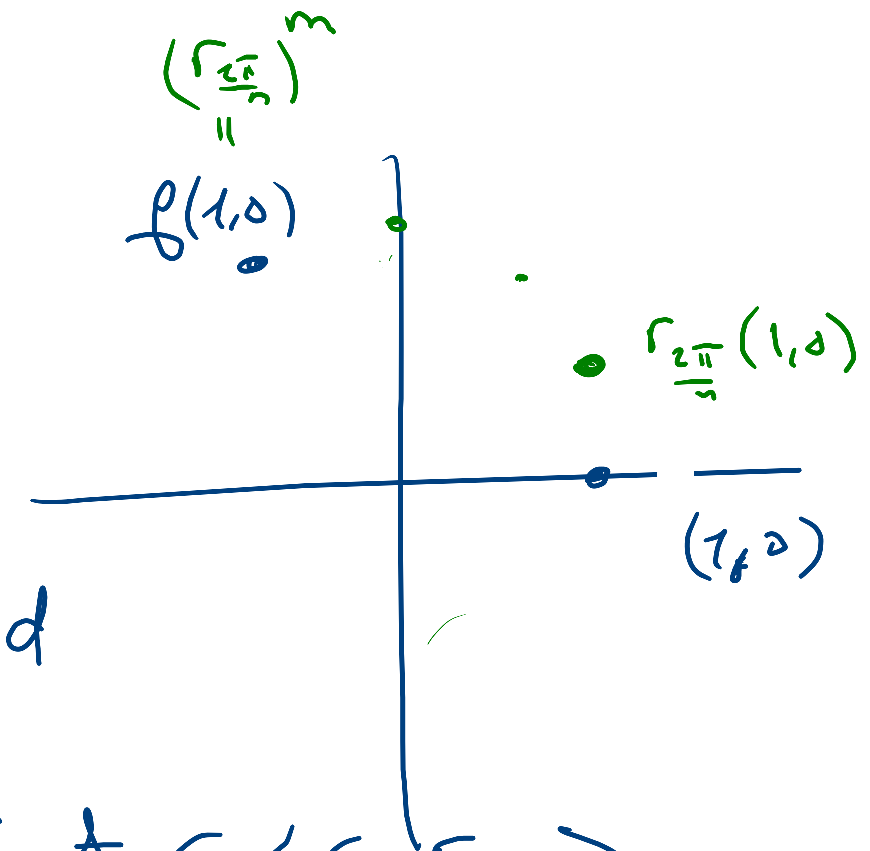
3) $\# D_n = 2n$ (Huom/Varo! Joissain kirjoissa merk. ryhmää D_n merkinnällä D_{2n})

Tod. 2) Uskotaan, että $\langle s, r_{\frac{2\pi}{n}} \rangle \leq D_n$.

Olkoon $f \in D_n$. Tällöin f kuvaa P_n:n kärjet itselleen. Tällöin

$\exists\, m \in \mathbb{Z}$: $r_{\frac{2\pi}{n}}^{-m} (f(1,0)) = (1,0)$

$\exists\, t \in \{id, s\}$ s.e. $t\, r_{\frac{2\pi}{n}}^{-m} f(r_{\frac{2\pi}{n}}(1,0)) = r_{\frac{2\pi}{n}}(1,0)$



lin. kuvaus $t\, r_{\frac{2\pi}{n}}^{-m} f$ pitää paikallaan

vektorit 0, $(1,0)$ ja $r_{\frac{2\pi}{n}}(1,0)$ $\Rightarrow t\, r_{\frac{2\pi}{n}}^{-m} f = id$

$$\Rightarrow f = r_{\frac{2\pi}{n}}^{m}\, t \in \langle s, r_{\frac{2\pi}{n}} \rangle.$$