

Ryhmät 27.4.2021

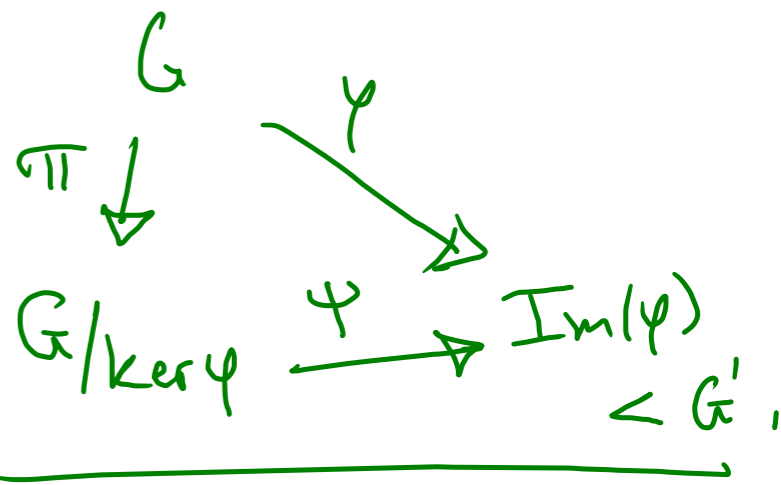
$$H \triangleleft G \quad \leadsto \quad G/H = \{gH : g \in G\} \quad \left. \vphantom{G/H} \right\} \text{ tehijärjestelmä .}$$

laskutoimitus $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$

Esim. $9\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ on kongruenssiluokkien yhteensä.

Lause 12.17. (Ryhmien 1. isomorfismlause) Jos $\varphi: G \rightarrow G'$ on ryhmähomomorfismi, niin $\text{Im}(\varphi) = \varphi(G) \cong \underline{G/\ker \varphi}$

(Verrata L. 9.25(1):n tod.)



$\ker \varphi \triangleleft G$

Prop. 12.16: Jokainen normaali aliryhmä on jonkin ryhmähomomorfismin ydin.
Tod. 40s.

①

Seuraus. Jos $\varphi: G \rightarrow G'$ on surj. homomorfismi, niin

$$G/\ker\varphi \cong G'$$

Tod. Määär $\psi: G/\ker\varphi \rightarrow G'$,

$$\psi(x \ker\varphi) = \varphi(x).$$

Jos $x \ker\varphi = y \ker\varphi$, niin $y = xh$ jollain $h \in \ker\varphi$.

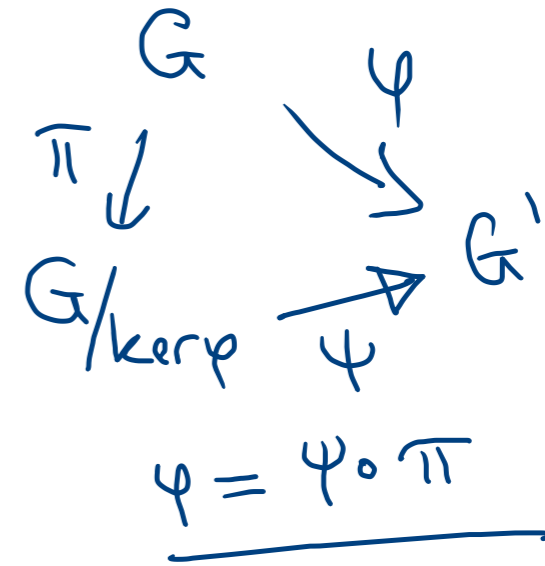
Tällöin $\psi(y) = \psi(xh) = \varphi(x) \underbrace{\varphi(h)}_{=e'} = \varphi(x)$,

joten ψ on hyvin määritetty.

Os. että ψ on homomorfismi:

Olk. $x, y \in G \mapsto x \ker\varphi, y \ker\varphi \in G/\ker\varphi$

$$\psi(x \ker\varphi \cdot y \ker\varphi) = \psi(xy \ker\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \psi(x \ker\varphi) \cdot \psi(y \ker\varphi)$$



(2)

Jos $y \in \text{Im } \varphi$, niin $y = \varphi(x) = \varphi(x \ker \varphi)$ jollain $x \in G$.

$\Rightarrow \varphi(G/\ker \varphi) = \varphi(G) = \text{Im}(\varphi)$. Siis φ on surjektio.

Os. että φ on injektio. Olk. $g \ker \varphi \in \ker \varphi$. Tääläin

$$\underline{\varphi(g)} = \varphi(\underline{g \ker \varphi}) = \underline{e'} \Rightarrow \underline{g \in \ker \varphi} \Rightarrow g \ker \varphi = \ker \varphi$$

$\Leftrightarrow \ker \varphi = \{ \ker \varphi \}$. $\xrightarrow{\text{p.9.14.}}$ φ on injektio.

Siis $\varphi: G/\ker \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ on isomorfismi. \square

Esim. $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, Möbius-kuvaus. $\underline{ad-bc} \neq 0$

on bijektio, kun sovitaan, että $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ ja $f(\infty) = \frac{a}{c}$.
Osoittautuu, että tällaiset kuvaukset muodostavat ryhmän $\text{Perm}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$
aliryhmän \mathcal{M} .

$$\varphi: \text{GL}_2 \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \underbrace{\left(\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)}_{\in \mathcal{M}}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{on homomorfismi surj.}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

$$\mathcal{M}: \text{ n.a. on id, } \text{id}(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = \frac{az+0}{0z+a}, \quad a \neq 0.$$

$$\Rightarrow \ker \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}^\times \right\} \cong \mathbb{C}^\times$$

$$\text{Isom. lause: } \mathcal{M} = \text{GL}_2 \mathbb{C} / \mathbb{C}^\times.$$

Lause 12.24 (Toinen isomorfismlause). Olk. $T \leq G, N \trianglelefteq G$. Tällöin

$$T/(N \cap T) \cong NT/N.$$

Seuraus 12.25

④ Top. idea: Jos $a, b \in \mathbb{Z}$, niin $\text{sytt}(a, b) \mathbb{Z} / b \mathbb{Z} \cong \frac{a \mathbb{Z}}{\text{pyj}(a, b) \mathbb{Z}} \mid \begin{cases} \text{pyj}(a, b) = ab \\ \text{sytt}(a, b) = a \mathbb{Z} \cap b \mathbb{Z} \end{cases}$

Lause 12.24 (Toinen isomorfismlause). Olk. $T \leq G$, $N \trianglelefteq G$. Tällöin

$$T/(N \cap T) \cong \overline{NT/N}.$$

Hajj: $NT = \langle N \cup T \rangle = TN \leq G$.

Huom. Jos $\left. \begin{array}{l} H \leq G \\ N \trianglelefteq G \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{L.12.1}} \underline{N \trianglelefteq H}$.

$$gN = Ng \quad \forall g \in G \quad \rightarrow \quad gN = Ng \quad \forall g \in H \leq G.$$

Prop. 12.23. Jos $T \leq G$, $N \trianglelefteq G$, niin $N \cap T \trianglelefteq T$.

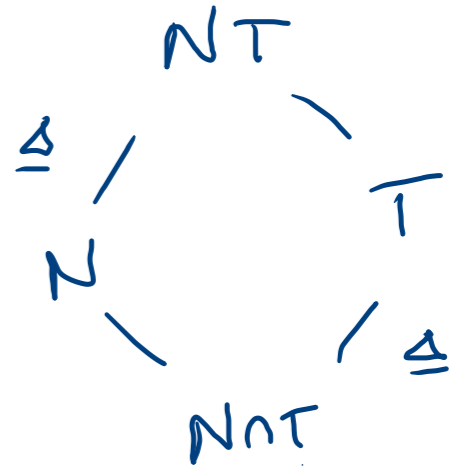
Tod. Olk. $\pi: G \rightarrow G/N$ luonn. homomorfismi, $\ker \pi = N$.

$$\pi|_T: T \rightarrow G/N \quad \ker \pi|_T = T \cap N \xrightarrow{\text{S.12.8}} \underline{T \cap N \trianglelefteq T}.$$

L. 12.24:n tod. 1. isom. lause. $T/(T \cap N) \cong \pi(T)$.

$$\pi(nx) = \pi(x) \quad \forall n \in N, x \in T$$

5) $\ker \pi|_{NT} = N$. 1. isom. lause: $NT/N \cong \pi(NT) = \underline{\pi(T)}$ \square



Lause 12.26 (3. isomorfismlause) Olk. $K, H \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$.

Tällöin $G/H \cong (G/K)/(H/K)$.

Tod. Olk. $\varphi: G/K \rightarrow G/H$, $\varphi(gK) = gH$.

Os. että φ on surj. homomorfismi ja $\ker \varphi = H/K$.

1. isom. lause \Rightarrow väite.

$$\varphi(xK yK) = \varphi(xyK) = xyH = xHyH = \underline{\underline{\varphi(xK) \varphi(yK)}}.$$

Surj. OK.

Määr φ 'in ydin: Olk. $h \in H$. Tällöin $\varphi(hK) = hH = H$

$\Rightarrow H/K \subseteq \ker \varphi$. Olk. $g \in G - H$, Tällöin $\varphi(gK) = gH \neq H$.

$\leadsto \underline{\underline{H/K = \ker \varphi}}$.

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$
$$b \neq 0 \neq c.$$

$$\frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$