Ryhmät 19.4.2021

11 Lagrangen lause

$\mathbb{Z}$
$\vee$

Esim. Kongr. luokat: Olk. $q \geq 2$ $\quad a \equiv b \mod q \iff a-b \in q\mathbb{Z}$.

Alkion a kongr. luokka on $a + q\mathbb{Z} = \{a + qk : k \in \mathbb{Z}\}$

$$= \{\underbrace{a+s}_{s+a} : s \in q\mathbb{Z}\} = q\mathbb{Z} + a$$

aliryhmän $q\mathbb{Z}$ vas sivuluokkien joukko = kongr. luokkien joukko

$$\rightsquigarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{a + q\mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}\}, \quad \#(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = q.$$

Määr. Olk. G ryhmä, $H \leq G$, $g \in G$. g:n vasen (oikea) sivuluokka H:n suhteen on

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$
$$gH = \{gh : h \in H\}$$

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$
$$H\backslash G = \{Hg : g \in G\}$$

1

Lemma. Jos G on komm. ryhmä, $H \leq G$, niin $gH = Hg$ $\forall g \in G$. $\square$

Esim. S_3 ei ole komm. ($\# S_3 = 3! = 6$. Harj: Jos $\# G \leq 5$, niin G on komm.)

$H = \langle (12) \rangle = \{id, (12)\}$. $S_3 = \{id, (12), (23), (13), (123), (132)\}$.

vas. sivuluokat $\underline{\underline{id\, H}} = H = \underline{\underline{(12)H}}$

$\underline{\underline{(23)H}} = \{(23), (23)(12) = (132)\} = \underline{\underline{(132)H}}$

$(23) = (132)(12)$

$(13)H = \{(13), (13)(12) = (123)\} = (123)H$

oik. sivuluokat $H\,id = H = H(12)$

$H(23) = \{(23), (12)(23) = (123)\} = H(123)$

$H(13) = \{(13), (12)(13) = (132)\} = H(132)$

$\langle (12) \rangle \backslash S_3 \neq S_3 / \langle (12) \rangle$.

$S_3 = H \cup (23)H \cup (13)H$

$H \cap (23)H = \emptyset$

$H \cap (13)H = \emptyset$

$(23)H \cap (13)H = \emptyset$

Prop. 11.4. $H \leq G$.

1) $xH = yH \iff y^{-1}x \in H$

2) $Hx = Hy \iff xy^{-1} \in H$

Tod. Harj.

Esim.

$a + q\mathbb{Z} = b + q\mathbb{Z} \iff a - b \in q\mathbb{Z}$

$\underbrace{y^{-1}x}_{h} \in H$

$xk = \cdots\cdots = yk'$

$k \in H \qquad k' \in H$

$\rightsquigarrow xH \subset yH$

Seuraus. $xH = H \iff x \in H$

$Hx = H \iff x \in H$.

Prop. 11.5. Olk. $H < G$,

1) H:n vas. sivuluokat määräävät G:n osituksen. Erit. $xH = yH \iff x \in yH$

2) H:n oik. sivuluokat määr. G:n osituksen. Erit. $Hx = Hy \iff x \in Hy$.

Määr. Olk. X joukko, $A_i \subset X$, $A_i \neq \emptyset$.

Jos $\boxed{X = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ja } A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j}$,

niin joukot A_i määräävät X:n osituksen.

$X = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ erillinen yhdiste

③

Tot. 1) Jos $x \in G$, avem $x \in x\underset{\substack{\Downarrow\\ e}}{H} \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in G} xH$.

Jos $xH \cap yH \neq \emptyset$, avem un $z \in xH \cap yH \Rightarrow xh_1 = z = yh_2$.

$y = xh_1h_2^{-1}$

$x = yh_2h_1^{-1}$

Os. ettā $xH = yH$. Ok. $g \in xH$.

$$\left.\begin{aligned} g &= xh_3, \ h_3 \in H. \\ &= y\underbrace{(h_2h_1^{-1}h_3)}_{\in H} \in yH \end{aligned}\right\} \Rightarrow xH \subset yH.$$

yH

$\Downarrow$

Jos $g' = yh_4 = x(h_1h_2^{-1}h_4) \in xH \Rightarrow yH \subset xH$

$xH = yH$

Siis $\boxed{G = \bigsqcup_{xH \in G/H} xH.}$

(4)

Prop. $H \leq G$, $g \in G \Rightarrow H$, gH ja Hg ovat yhtä mahtavia

$\Leftrightarrow \exists\, b : gH \to Hg$ bijektio.

Tod. Vasen siirto: $g \in G \rightsquigarrow l_g : G \to G$ bijektio (Lemma 10,9)

$l_g(x) = gx$

$gH = l_g(H)$. Siis l_g määrää bijektion $l_g|_H : H \to gH$.

$\Rightarrow H$ ja gH yhtä mahtavia.

Oikea siirto $r_g|_H : H \to Hg$ bijektio $\Rightarrow H$ ja Hg yhtä mahtavia.

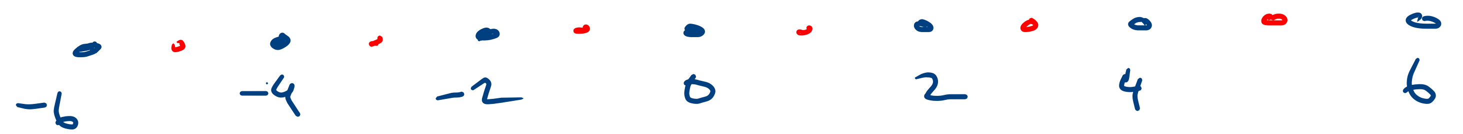
$r_g(x) = xg$

$\Rightarrow gH$ ja Hg yhtä mahtavia.

oik. Hg

Seuraus. Vas sivuluokat gH osittavat ryhmän G keskenään yhtä mahtavilla joukoilla.

Esim.



$\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cup (1+2\mathbb{Z})$

Kuvaus $k \mapsto k+1$ on bijektio.

$$2\mathbb{Z} \to 1+2\mathbb{Z}$$

Prop. 11.7 $H \leq G$. Joukot G/H ja $H\backslash G$ ovat yhtä mahtavat.

Tod. Harj.

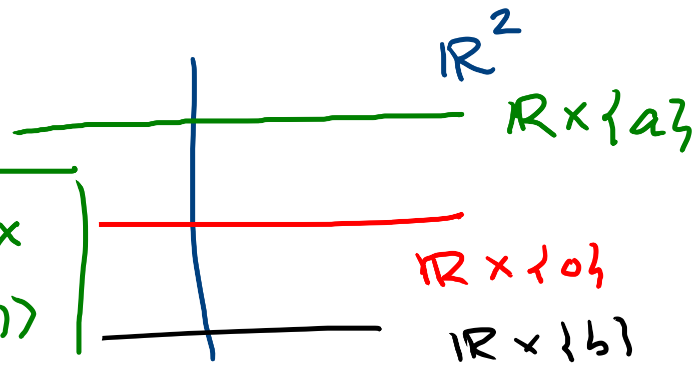
Määr. Aliryhmän $H \leq G$ **indeksi** on $[G:H] = \#(G/H) = \#(H\backslash G) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Esim.

- $[\mathbb{Z} : 9\mathbb{Z}] = 9$.
- $[\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \{0\}] = \infty$
- $[S_3 : \langle (12) \rangle] = 3$ Esim 11.3

$\#S_3 = 6 = [S_3 : \langle(12)\rangle] \times \#\langle(12)\rangle$

$\#\langle(12)\rangle = 2$



$a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \{a\} \neq \mathbb{R} \times \{b\}$, jos $a \neq b$

Lause 11.10 (Lagrange) Jos $\# G < \infty$ ja $H < G$, niin

$$\# G = [G : H]\, \# H .$$