JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 9 **Topologiset vektoriavaruudet**
Tiistai 23.11.2010 14.15-15.45 MaD-355

9.1. Olkoon $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ja $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Osoita laskemalla tai kumoa, että

$$D(f\Lambda) = Df\,\Lambda + f\,D\lambda.$$

9.2. Avaruus $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ on varustettu heikolla topologialla. Oleta, että $(f_n)_\mathbb{N} \to f$ on suppeneva jono Fréchet-avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (Seminormeina derivaattojen sup-normit kompakteissa joukoissa) ja jono $(\Lambda_n)_\mathbb{N} \to \Lambda$ on suppeneva jono distriuutioiden avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$. Osoita, että $(f_n\Lambda_n)_\mathbb{N} \to \Lambda$ on suppeneva jono distriuutioiden avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.

9.3. Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ distribuutio. Olkoon

$$W = \bigcup \{\omega \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega \mid \langle f, \Lambda\rangle = 0, \text{ kun } \operatorname{supp} f \subset \omega\}.$$

Osoita, että $\langle f, \Lambda\rangle = 0$, kun $\operatorname{supp} f \subset W$.

Vihje: Ykkösen ositus.

9.4. Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ distribuutio. Osoita, että

a) Jos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\Lambda = \emptyset$, niin $\langle f, \Lambda\rangle = 0$.
b) Jos $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ja $\psi(x) = 1$ jossain avoimessa joukossa $A \supset \operatorname{supp}\Lambda$, niin $\Lambda\psi = \Lambda$.

9.5. Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ja $K_B(o, r)$ 0–keskinen kompakti väli. Oletetaan, että $D^k\varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots, N$ ja $\|D^N\varphi\big|_K\|_\infty \leq \eta$ Osoita, että tällöin on kaikilla $k \leq N$ ja $x \in K$

$$|D^k\varphi(x)| \leq \eta|x|^{N-k}.$$

Pystytkö yleistämään? n-ulotteinen versio on : $\|D^k\varphi\big|_K\|_\infty \leq \eta n^{N-k}$.

9.6. Olkoon $(\omega_i)_{i\in I}$ perhe avoimia joukkoja $\omega_i \subset \mathbb{R}$ ja $\Omega = \bigcup_{i \perp I} \omega_i$. Silloin on olemassa jono (!) funktioita $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

a) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists i \in I$ siten, että $\operatorname{supp}\psi_n \subset \omega_i$.
b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n = 1$ joukossa Ω.
c) Jokaista kompaktia $K \subset \Omega$ kohti on olemassa avoin $A \supset K$ ja luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{n=1}^m \psi_n = 1$ joukossa A.

Vihje: Klassista reaalianalyysiä. Voit verrata (muihin) ykkösen osituksiin ja kerrata/etsiä muita samantapaisia lauseita.

9.7. (Ylimääräinen, jos ehdoitään ja kiinnostaa) Vertaa, mitä yhteistä ja eroa on tasaisen rajoituksen periaatteella ja Arzela-Ascolin lauseella. Onko todistuksilla yhteisisä piirteitä?