JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Exercise set 4 **Topological Vector Spaces**
Tuesday Oct.19.2010 2.30-4.00 PM MaD-355

4.1. No exercise numbered 4.1

4.2. Prove Mazur's theorem assuming Hahn's and -Banach's theorem to be true. Don't use the axiom of choice again.

4.3. Let E be a topological vector space and $S = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E$. We call the set S *topologically free*, or *topologically linearly independent*, if for all $\alpha \in I$ we have $x_\alpha \notin \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Prove that if E is locally convex, then $S = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E$ is topologically free if and only of there exists a family of linear forms $S = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E^*$, that for all $\alpha \in I$

(1) f_α is continuous
(2) $f_\alpha(x_\alpha) = 1$
(3) $f_\alpha(x_\beta) = 0$ for all $\beta \in I \setminus \{\alpha\}$.

4.4. Let E be a complex topological vector space, $H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ a hyperplane, so f is $\mathbf{C}$–linear $E \to \mathbf{C}$. Let $f_{\mathbf{R}}$ be the real part of f , which is defined as $f_{\mathbf{R}}(x) = \operatorname{Re} f(x)$. Prove that the subset $H_{\mathbf{R}} = \{x \in E \mid f_{\mathbf{R}}(x) = 0\}$ is a hyuperplane in the real topological vector space E, which we may denote by $E_{\mathbf{R}}$. Prove also that $H = H_{\mathbf{R}} \cap (iH_{\mathbf{R}})$.

4.5. Prove that if E and F are Fréchet spaces and $T : E \to F$ is linear, then the graph $\operatorname{Gr} T$ is closed if and only if

$$(x_n, f(x_n)) \to (0, y) \implies y = 0.$$

(How about more generall set-ups?)

4.6. The direct linear algebraic sum $E = M \oplus N$ of two subspaces of a topological vektor space is called a *topological direct sum*, if its subspace topology is the same as its product topology, i.e. the mapping $(x, y) \mapsto x + y$ is a homeomorphism between the product space $M \times N$ and the subspace $M \oplus N \subset E$. Sometimes this is expressed by calling N a *topological supplement* of M. Let π be the projection from $E = M \oplus N$ to its subspace M in the diredction N, ie. $\pi(x + y) = x$, for $x \in M$ and $y \in N$.

a) Prove that if M and N are topological, and linear subspaces of E, then $E = M \oplus N$ is a topological direct sum if and only if π is continuous.

b) Prove that if E is a Fréchet space, and if both M and N are closed subspaces, then π is continuous and $M \oplus N$ a topological direct sum. (Is it sufficient to assume that one of the two subspaces is closed?)

4.7. (continuation) c) Let $T : E \to F$ be a continuous linear mapping, where E and F are topological vector spaces. Prove that T has a continuous linear *right inverse*, (same as a continuous, linear $S : F \to E$, for which $F \circ G = id_F$, if T is an open surjection) and the kernel $\ker T \subset E$ has a topological supplelment.

4.8. (If there is time.) a) Let E be a vector space, and $\mathcal{B} = \{A \subset E \mid A$ absobing, balancedd and convex$\}$. Prove that $\mathcal{B}$ defines a locally convex topology $\mathcal{T}$, in fact the finest possible locally convex topology on E.

b) Prove that if F is a locally convex space, then every linear mapping $E \to F$ is continuous.

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 4 **Topologiset vektoriavaruudet**
tiistai 19.10.2010 14.30-16.00 MaD-355

4.1. Konstruoi esimekki lokaalikonveksin avaruuden osajoukosta, joka on jonotäydellinen, mutta ei täydellinen.
VIHJE:
VIHJE:
VIHJE:

4.2. Todista Mazurin lause Hahnin ja Banachin lauseen seurauksena käyttämättä uudelleen valinta-aksioomaa.

4.3. Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja $S = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E$. Sanomme, että joukko S on *topologisesti vapaa*, eli *topologisesti lineaarisesti riippumaton*, jos kaikilla $\alpha \in I$ pätee $x_\alpha \notin \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Osoita, että jos E on lokaalikonveksi, niin $S = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E$ on topologisesti vapaa silloin ja vain silloin, kun on olemassa sellainen perhe lineaarimuotoja $S = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E^*$, että kaikilla $\alpha \in I$

(1) f_α on jatkuva
(2) $f_\alpha(x_\alpha) = 1$
(3) $f_\alpha(x_\beta) = 0$ kaikilla $\beta \in I \setminus \{\alpha\}$.

4.4. Olkoon E kompleksikertoiminen topologinen vektoriavaruus, $H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ jokin sen hypertaso, f siis $\mathbf{C}$–lineaarinen $E \to \mathbf{C}$. Olkoon $f_{\mathbf{R}}$ lineaarimuodon f reaaliosa, siis $f_{\mathbf{R}}(x) = \operatorname{Re} f(x)$. Osoita, että osajoukko $H_{\mathbf{R}} = \{x \in E \mid f_{\mathbf{R}}(x) = 0\}$ on hypertaso reaalikertoimisessa topologisessa vektoriavaruudessa E, jota merkitsemme $E_{\mathbf{R}}$. Näytä samalla, että $H = H_{\mathbf{R}} \cap (iH_{\mathbf{R}})$.

4.5. Näytä, että jos E ja F ovat Fréchet'n avaruuksia ja $T : E \to F$ on lineaarikuvaus, niin kuvaaja $\operatorname{Gr} T$ on suljettu jos ja vain jos

$$(x_n, f(x_n)) \to (0, y) \implies y = 0.$$

(Päteekö tämä yleisemminkin?)

4.6. Kahden topologisen vektoriavaruuden suoraa lineaarialgebrallista summaa $E = M \oplus N$ sanotaan niiden *topologiseksi suoraksi summaksi*, mikäli se on varustettu tulotopologialla eli kuvaus $(x, y) \mapsto x + y$ on homeomorfismi tuloavaruudelta $M \times N$ suoralle summalle $M \oplus N$. Samaa ilmaistaan sanomalla, että N on M:n *topologinen supplementti*. Merkitään π:llä projektiota suoralta summalta $E = M \oplus N$ aliavaruudelleen M suuntaan N, siis $\pi(x + y) = x$, kun $x \in M$ ja $y \in N$.

a) Osoita, että jos M ja N ovat E:n topologisia ja lineaarialgebrallisia alivaruuksia, niin suora summa $E = M \oplus N$ on topologinen suora summa tasan sillä ehdolla, että π on jatkuva.

b) Näytä, että jos E on Fréchet'n avaruus, ja jos sekä M että N ovat suljettuja aliavaruuksia, niin π on jatkuva ja siis $M \oplus N$ topologinen suora summa. (Riittääkö olettaa, että toinen on suljettu?)

4.7. (jatkoa) c) Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus, missä E ja F ovat topologisia vektoriavaruuksia. Osoita, että T:llä on jatkuva lineaarinen *oikeanpuoleinen käänteiskuvaus* eli jatkuva, lineaarinen $S : F \to E$, jolla $F \circ G = id_F$ jos T on avoin surjektio ja ytimellä $\ker T \subset E$ on topologinen supplelmentti.

4.8. (Jos puhtia ja aikaa riittää.) a) Olkoon E vektoriavaruus, $\mathcal{B} = \{A \subset E \mid A$ on absoboiva, balansoitu ja konveksi$\}$. Näytä, että $\mathcal{B}$ määrää avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$, joka on kaikkein hienoin lokaalikonveksi topologia E:ssä.

b) Olkoon $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$ vektoriavaruuden E kaikkien äärellisulotteisten vektoriavaruuksien perhe ja $\mathcal{T}_\alpha$ avaruuden E_α standarditopologia, siis sen (ainoa!) Hausdorfftva-topologia. Merkitään vielä j_α:lla kanonista injektiota $E_\alpha \to E$. (Tällöin a)-kohdan topologia $\mathcal{T}$ on ns. induktiivinen lokaalikonveksi topologia perheen $(J_\alpha)_{\alpha \in I}$ suhteen.) Osoita, että jos F on lokaalikonveksi avaruus, niin jokainen lineaarikuvaus $E \to F$ on jatkuva.