GROUPS AND THEIR REPRESENTATIONS - FOURTH PILE

KAREN E. SMITH

22. Äärettömistä ryhmistä

Example 22.1. Äärettömille ryhmille on olemassa esitysteoriaa ja sellainen on tarpeen, sillä monet, ehkäpä useimmat, tunnetuimmista ryhmistä ovat äärettömiä, esimerkiksi seuraavat:

(1) *Avaruuden siirtojen* eli *translaatioiden* ryhmä $(\mathbb{R}^n, +)$
(2) *Avaruuden kääntyvien lineaarikuvausten* eli *lineaaritransformaatioiden ryhmä* $GL(\mathbb{R}^n) \sim GL_n(\mathbb{R}) = \{$kääntyvät $n \times n-$matriisit$\}$ laskutoimituksena matriisitulo.
(3) *Tilavuuden ja suunnistuksen säilyttävien lineaarikuvausten ryhmä* $SL(\mathbb{R}^n) \sim SL_n(\mathbb{R}) = \{n \times n-$matriisit, joiden determinantti on $1\}$.
(4) *Kulmat, pituuden ja orientaation säilyttävien* eli *ortogonaalisten lineaarikuvausten ryhmä* $O(\mathbb{R}^n) \sim SO_n(\mathbb{R}) = \{n \times n-$matriisit, joiden sarakkeet (yhtä lailla rivit) ovat ortonormaalit$\}$. *ortogonaalisten suunnan säilyttävien lineaarikuvausten ryhmä* $SO(\mathbb{R}^n) \sim SO_n(\mathbb{R}) = \{n \times n-$matriisit, joiden sarakkeet (yhtä lailla rivit) ovat ortonormaalit ja determinantti $1\}$.
(5) *Lorentzin ryhmä* $SO_{3,1}(\mathbb{R})$, joka muodostuu kaikista annetun Minkowskin tulon säilyttävistä lineaarikuvauksista.
(6) *Avaruuden* $\mathbb{C}^n$ *kääntyvien lineaarikuvausten ryhmä* $GL(\mathbb{C}^n) \sim GL_n(\mathbb{R}) = \{$kääntyvät kompleksiset $n \times n-$matriisit$\}$.
(7) *Unitaaristen* eli kompleksisen sisätulon säilyttävien lineaarikuvausten ryhmä $U(\mathbb{C}^n) \sim U_n(\mathbb{C}) = \{$kompleksiset $n \times n-$matriisit, joiden sarakkeet (yhtä lailla rivit) ovat ortonormaalit$\}$.
(8) $SU(\mathbb{C}^n) \sim U_n(\mathbb{C}) = \{$kompleksiset $n \times n-$matriisit, joiden sarakkeet (yhtä lailla rivit) ovat ortonormaalit ja determinantti $1\}$.
(9) Erikoistapauksena edellisestä $U(\mathbb{C}) = U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$
(10) Edellisten tulot ja monet tekijäavaruudet

Remark 22.2. Kaikki näistä toimivat jo määritelmällisesti jossain joukossa, useimmat lineaarisesti vektoriavaruuksissa. Otamme seuraavassa tehtäväksemme selvitellä, mitä muita esityksiä niillä mahdollisesti on. Ei ehkä ole aivan ilmeistä, miten äärellisten ryhmien eistysteoriaa voisi yleistää, ovathan yllä esitetyt ryhmät valtavan suuria, selvästi joukkoina jopa ylinumeroituvia, eikä niillä ole edes äärellistä virittäjäjoukkoa (Vrt. **??**, jossa on $GL_n(\mathbb{R})$:n virittäjäjoukko). Esimerkissä mainittujen ryhmien esitysten luokittelua helpottaa kuitenkin, että niillä kaikilla on ryhmän rakenteen lisäksi muutakin struktuuria, jota käytämme apuna. Kaikki ovat luonnollisella tavalla topologisia avaruuksia ja enemmänkin, sileitä monistoja. Lisäksi laskutoimitukset ovat jatkuvia, jopa sileitä, eli ryhmät ovat Lien ryhmiä. Seuraavassa luvussa määritellään nämä käsitteet.

23. Monistot ja Lien ryhmät

Remark 23.1. Sileän moniston ja Lien ryhmän käsite määritellään seuraavassa vaiheittain. Jo aluksi voi hahmotella, mistä on kysymys. Monisto on tavallisen sileän pinnan yleistys, yleensä moniulotteinen — siitä nimi. Monisto on siis joukko, usein jonkin korkeaulotteisen euklideisen avaruuden $\mathbb{R}^n$:n osajoukko, jonka jokaisessa pisteessä on olemassa tangenttiavaruus, tangenttitason luonnollinen yleistys. Monistolla on sileitä käyriä ja muita sileitä alimonistoja sekä ennen kaikkea monistolta on sileitä funktioita luvuille eli koordinaatteja sekä sileitä kuvauksia muille monistoille ja itselleen. Monistolla voi siten harrastaa differentiaalilaskentaa ja, jos se on samalla mitta-avaruus, myös integraalilaskentaa.

Lien ryhmä on samalla ryhmä ja sileä monisto, jossa laskutoimitus on differentioituva kuvaus, jolloin käy niin, että vasemmalta kertominen ryhmän alkiolla on diffeomorfismi ryhmältä itselleen. Erityisesti jokaiseen pisteeseen piirretyt tangenttiavaruudet osoittautuvat täysin samanlaisiksi ja voidaan siis samaistaa neutraalialkion kohdalle piirrettyyn tangenttiavaruuteen, joka on nimeltään ryhmän Lien algebra. Ja "algebra" se onkin, sillä siinä on vektoriavaruuden rakenteen lisäksi myös eräänlainen kertolaskutoimitus, jota usein merkitään hakasulkein [ ].

Lien ryhmien esitysteorian pääidea on suunnilleen seuraava: Lien ryhmän esityksestä saadaan luonnollisella tavalla sen "Lien algebran esitys", joka on matemaattisesti paremmin hallittavissa oleva käsite, koska Lien algebra on reaalinen vektoriavaruus, joka kannattaa vielä täydentää kompleksiseksi vektoriavaruudeksi, koska täydellisessä kunnassa $\mathbb{C}$ on helpompi laskea kuin $\mathbb{R}$:ssä. Syntyvien ns. puoliyksinkertaisten Lien algebroiden esitykset on mahdollista luokitella ja niistä saa rekonstruoitua alun perin etsityt reaaliset ja edelleen Lien ryhmän esitykset. Tämä on ohjelmamme periaatteessa, pitkälti myös käytännössä.

Remark 23.2. Äärettömien ryhmien esitysteoriaa voi rakentaa myös yleistämällä äärellisten ryhmien esitysteoriaa *Haarin mitan* avulla. Haarin mitta on ryhmällä määritelty translaatioinvariantti mitta, siis mitta μ, jossa osajoukko $U \subset G$ ja sen jokainen kuva vasemmalta kerrottaessa gU ovat yhtä suuret:

$$\mu(U) = \mu(gU) \quad \forall U \subset G,\ g \in G.$$

Erityisesti ns. kompakteissa topologisissa ryhmissä tällainen mitta on melko helposti konstruoitavissa ja ryhmästä tulee äärellismittainen, pienellä sovituksella $\mu(G) = 1$. Nyt on mahdollista jäljitellä äärellisten ryhmien esitysteoriaa karakteereinen päivineen korvaamalla todistuksissa avainasemassa ollut keskiarvo $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}$ integraalilla $\int_G d\mu$. Kompakteja ovat edellä esitellyistä ryhmistä kuitenkin vain $O(\mathbb{R}^n)$, $SO(\mathbb{R}^n)$, $U(\mathbb{C}^n)$ ja $SU(\mathbb{C}^n)$. Haarin mitta voidaan onneksi muodostaa kohtuullisella vaivalla myös muihin Lien ryhmiin, joista tosin ei tule äärellismittaisia, mikää pilaa keskiarvolla operoimisen ja muuttaa teoriaa selvästi.

23.1. **Topologiaa.**

Definition 23.3. *Topologinen avaruus* ja sen *topologia* määritellään aksiomaattisesti tunnetulla tavalla.

Remark 23.4. Esimerkkejä topologioista:

(1) *triviaali topologia* missä tahansa joukossa,
(2) *diskreetti topologia* missä tahansa joukossa,
(3) *kofiniittinen topologia* missä tahansa joukossa,
(4) *euklidinen topologia* $\mathbb{R}^n$:ssä,
(5) *Zariskin topologia* $\mathbb{R}^n$:ssä (Zariskin topologiassa suljettuja ovat polynomien nollajoukot ja niiden leikkauset),
(6) *aliavaruustopologia* topologisen avaruuden osajoukossa,
(7) *tulotopologia* topologisten avaruuksien tulojoukossa.

Remark 23.5. Topologinen avaruus on *topologisten avaruuksien kategorian objekti.* Kertamme joitakin tähän aihepiiriin liittyviä määritelmiä:

- Topologisten avaruuksien kategorian mielessä samoja eli *isomorfisia* ovat topologiset avaruudet, joiden välillä on bijektio, joka kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi, kuten myös sen käänteiskuvaus, siis topologian säilyttävä bijektio.

- *Topologisten avaruuksien kategorian morfismi* on *jatkuva* kuvaus, ts. kuvaus, jossa avointen joukkojen alkukuvat ovat avoimia.

- *Avoin kuvaus* on kuvaus, jossa avointen joukkojen kuvat ovat avoimia. Huomataan, että jatkuva kuvaus ei yleensä ole avoin edes tavallisessa topologiassa $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vastaesimerkkinä $x \to x^2$. Myöskään avoin kuvaus ei yleensä ole jatkuva eikä jatkuva avoin kuvaus ole yleensä bijektio.

- *Homeomorfismi* on kumpaankin suuntaan jatkuva bijektio eli jatkuva ja samalla avoin bijektio. Tämä on sama asia kuin isomorfismi!

- *Topologian kanta* eli *virittäjistö* on joukko avoimia joukkoja, "kantajoukkoja" jolla on se ominaisuus, että jokainen avoin joukko voidan lausua yhdisteenä kantajoukoista. Esimerkkinä avoimet pallot tavallisessa euklidisessa topologiassa.

- *Kahden topologisen avaruuden tulo* on niiden karteesinen tulo varustettuna topologialla, jonka kantana ovat alkuperäisten avointen joukkojen tulot. Esimerkkinä tulotopologiasta olkoon $\mathbb{R}^2$:n euklidinen topologia avaruuksien $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}$ topologioiden *tulotopologia*na.

- *Hausdorff*- avaruus on topologinen avaruus, joka toteuttaa *toisen numeroituvuusehdon* T_2, eli jossa kahdella eri pisteellä on aina erilliset avoimet ympäristöt. Esimerkiksi tavallinen euklidinen topologia ja diskreetti topologia. Vastaesimerkkejä ovat äärettömän joukon triviaali topologia ja kofiniittinen topologia sekä $\mathbb{R}^n$:n Zariskin topologia, kun $n \geq 2$.

23.2. **Sileät kuvaukset euklidisessa avaruudessa ja klassiset monistot.**

Definition 23.6. Olkoot $U \subset \mathbb{R}^m$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja. Sanomme, että kuvaus $f : U \to V$ on *sileä*, jos sillä on jokaisessa pisteessä $u \in U$ kaikki osittaisderivaatat. Differentiaalilaskennasta tiedämme, että sileällä funktiolla on kaikki derivaatatkin ja että sileiden funktioiden $f : U \to V$ joukkoa, joka on vektoriavaruus, voi merkitä vaikkapa $C^\infty(U, V)$.

Remark 23.7. Sileys on funktion "lokaali ominaisuus" seuraavassa mielessä: $f : U \to V$ on sileä, jos ja vain jos sen jokainen rajoittuma johonkin U:n avoimeen osajoukkoon on sileä. Rittää myös tutkia f:n rajoittumia jossain U:n avoimessa peitteessä. Tämä johtuu tietenkin siitä, että osittaisderivaatat on määritelty pisteiden ympäristössä; kaikki osittisderivaatat pisteessä $u \in U$ voi määrätä, kunhan tuntee funktion arvot $f(x)$ jossain u:n ympäristössä eli avoimessa joukossa $A \ni u$.

Lokaalisuusominaisuus, jota moniston määritelmässä tarvitaan, ilmaistaan joskus sanomalla, että sileät funktiot muodostavat *funktiolyhteen.* Muita funktiolyhteitä ovat esimerkiksi jatkuvat funktiot, derivoituvat funktiot ja reaalianalyyttiset funktiot sekä rationaalifunktiot. Niistäkin voi muodostaa omanlaisiaan "monistoja". Moniston määritelmässä voi myös korvata reaaliluvut kompleksiluvuilla, jolloin sileiden funktioiden rooliin tulevat holomorfiset eli komponenteittain analyyttiset funktiot $\mathbb{C}^d$:n avointen osajoukkojen välillä. Näin saadaan "kompleksisia monistoja".

Monistolla on kaksi historiallisesti erilaista määritelmää, joista vanhempi on peräisin Bernhard Riemannilta. Esitämme molemmat. Vasta 1930-luvulla *Hassler Whitney* todisti, että molemmat määritelmät johtavat aina samaan tulokseen. Klassisessa määritelmässä monisto on avaruuden R^n osajoukko, erityisesti sillä on R^n:stä periytyvä topologia ja sileyskäsite. Abstraktissa määritelmässä monisto on alun perin vain topologinen avaruus, jolla on sileyteen liittyvää lisärakennetta, ns. kartasto. Whitneyn lause sanoo, että $n-$ulotteinen abstrakti monisto on aina isomorfinen jonkin avaruuden $\mathbb{R}^{2n+1}$ alimoniston kanssa, joka on sama asia kuin klassinen monisto. Lyhyesti: Jokainen $n-$ulotteinen abstrakti monisto voidaan "upottaa" avaruuteen $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Aloitamme moniston klassisen määritelmän yleistämällä sileän kuvauksen käsitteen koskemaan muissakin kuin avoimissa joukoissa määriteltyjä kuvauksia.

Definition 23.8. Olkoot $U \subset \mathbb{R}^m$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltaisia osajoukkoja. Sanomme, että kuvaus $f : U \to V$ on *sileä*, jos se on jonkin sileän kuvauksen rajoittuma joukkoon U, eli jos on olemassa avoimet joukot $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ ja $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ ja sileä kuvaus $\tilde{f} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ siten, että $U \subset \tilde{U}$, $V \subset \tilde{V}$ ja $f(u) = \tilde{f}(u)$ kaikilla $u \in U$. Sileiden funktioiden $f : U \to V$ joukkoa, joka on vektoriavaruus, voi tässäkin tapauksessa merkitä $C^\infty(U, V)$, koska laajentamamme sileyskäsite yhtyy aikaisempaan avointen joukkojen tapauksessa.

Definition 23.9. Olkoot $U \subset \mathbb{R}^m$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltaisia osajoukkoja. Sanomme, että kuvaus $f : U \to V$ on *diffeomorfismi*, jos se on bijektio ja sekä $f : U \to V$ että $f^{-1} : V \to U$ ovat sileitä.

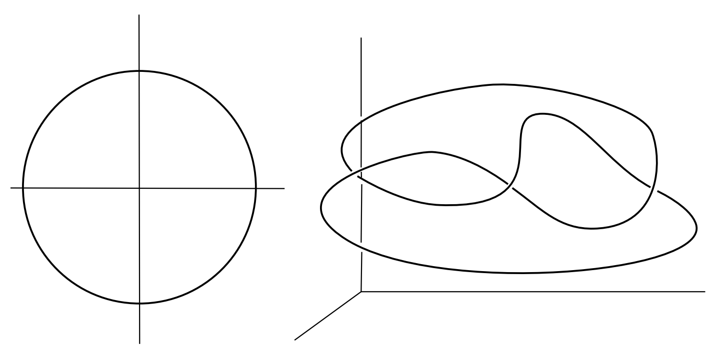
Remark 23.10. Diffeomorfismi on selvästikin homeomorfismi, joten diffeomorfiset joukot ovat topologisina avaruuksina samat.

Remark 23.11. Diffeomorfisuus on ekvivalenssirelaatio.

Remark 23.12. Kummassakaan edellisessä määritelmässä ei tarvitse olettaa euklidisten avaruuksien ulotteisuuksien m ja n olevan samoja. Tämä koskee erityisesti myös diffeomorfismin määritelmää, vaikka onkin tunnettua, ettei eriulotteisten avoimien joukkojen välillä ole olemassa edes homeomorfismia. Ulotteisuusvaatimusta ei tarvita, koska itse diffeomorfismi f ja sen käänteinen f^{-1} ovat määritellyt vain joukkojen U ja V välillä eikä niiden sileyden testaamiseen tarvittavien laajennusten $\tilde{f}$ ja $(f^{-1})^{\sim}$ suinkaan tarvitse olla ole toistensa käänteiskuvauksia.

Example 23.13. Diffeomorfisuudesta:

(1) Tason $\mathbb{R}^2$ yksikköympyrä on luonnollisella tavalla diffeomorfinen jokaisen ympyrän kanssa, olipa tämä sitten tasossa $\mathbb{R}^2$ missä tahansa paikassa tai vaikka avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Samoin ympyrä on diffeomorfinen ellipsin kanssa ja yleisemmin minkä tahansa sileän lenkin kanssa, olipa lenkki solmussa tai ei.



Kuva 1: Ympyrä ja solmu ovat diffeomorfiset

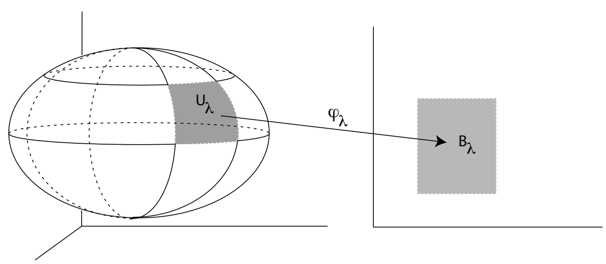
(2) Neliö ja ympyrä eivät ole diffeomorfiset.
(3) Neliö ja suorakulmio ovat diffeomorfiset.
(4) Neliö ja vino nelikulmio eivät ole diffeomorfiset.
(5) Pallo ja ympyrä eivät ole diffeomorfiset, eivät edes homeomorfiset.
(6) Pallo ja torus eivät ole diffeomorfiset, eivät edes homeomorfiset.

(7) On olemassa sileä bijektio ympyrältä neliölle, mutta sen käänteiskuvaus ei ole sileä, joten se ei ole diffeomorfismi
(8) Diffeomorfismi on sama asia kuin sellainen sileä bijektio, jonka käänteiskuvauskin on sileä.

Download "Differential Topology" by Guillemin and Pollack for free! Download our favorite book at Pdfdatabase.com. pdfdatabase.com/differential-topology-guillemin-pollack.html . There are other adresses as well. Also solutions to exercises are availalble after googleing a bit.

Definition 23.14. Sanomme, että osajoukko $X \subset \mathbb{R}^m$ on *(klassinen, sileä, d−ulotteinen) monisto*, eli *lokaalisti diffeomorfinen euklidisen avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *avoimen joukon kanssa*, jos X:llä on avoin peite $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, jolle jokainen U_λ on diffeomorfinen jonkin avoimen joukon $B_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ kanssa.

Avoimia peitejoukkoja U_λ sanotaan usein *karttaympäristöiksi* (engl. charts), joukkoja B_λ *karttalehdiksi*, diffeomorfismeja $\varphi_\lambda : U_\lambda \to B_\lambda$ *karttakuvauksiksi* eli *koordinaatistoiksi* ja niiden käänteiskuvauksia $\varphi_\lambda^{-1} : B_\lambda \to U_\lambda$ *lokaaleiksi parametrisoinneiksi.*



Kuva 2: Ellipsoidi on klassinen monisto

Remark 23.15. Määritelmässä voi halutessaan olettaa avointen osajoukkojen $B_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ olevan avoimia palloja tai yhtä lailla euklidisen topologian jonkin muun kannan joukkoja.

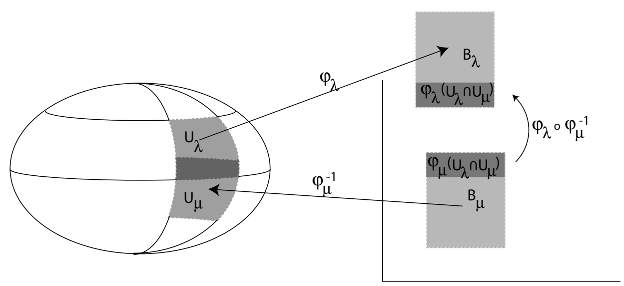
23.3. Abstraktit monistot.

Definition 23.16. Sanomme, että topologinen avaruus X on *abstrakti (sileä, d−ulotteinen) monisto* ja $\{\varphi_\lambda\}_\Lambda$ on sen *kartasto*, jos X:llä on avoin peite $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, jolla jokaiseen U_λ liittyy homeomorfismi $\varphi : U_\lambda \to B_\lambda$ johonkin avoimeen joukkoon $B_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ siten, että pätevät seuraavat ehdot:

(1) X on Hausdorff
(2) X:n topologialla on numeroituva kanta.
(3) Jos joukot U_λ ja U_μ leikkaavat toisiaan, niin *kartanvaihto, koordinaatistonvaihto* eli yhdistetty kuvaus

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

on diffeomorfismi.



Kuva 3: Ellipsoidi on abstrakti monisto

Remark 23.17 (Motivaatio)*.* Määritelmän idea on, että pitää jotenkin pystyä määrittelemään, mitä voitaisiin tarkoittaa sileällä funktiolla joukossa X. Topologia ei anna luontevaa tapaa. Kartasto antaa. On luonnollista pitää kuvausta $f : X \to \mathbb{R}$ sileänä, jos jokainen

$$f \circ \varphi_\lambda^{-1} : B_\lambda \to \mathbb{R}$$

on sileä. Määritelmän kohta (3) takaa, että tämä ei riipu kartan valinnasta.

Remark 23.18*.* Määritelmässä olisi tietenkin riittänyt vaatia, että jokainen kartanvaihto on sileä funktio, ovathan niiden käänteiskuvaukset itsekin kartanvaihtoja.

Remark 23.19*.* Abstraktin moniston avoin osajoukko on luonnollisessa mielessä abstrakti monisto "samoin kartoin", oikeastaan niiden rajoittumin.

Erityisesti $\mathbb{R}^n$:n jokainen avoin osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on trviaalilla tavalla n-ulotteinen sileä monisto, kelpaahan kartastoksi yksinään avoin joukko $U = A$, jonka identtinen kuvaus kuvaa avoimeksi joukoksi $B = A \subset \mathbb{R}^n$.

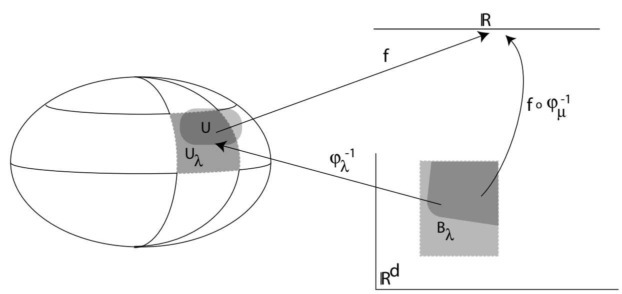
Remark 23.20*.* Klassinen monisto on luonnollisesti abstrakti monisto, mutta että jokainen abstrakti monisto myös on diffeomorfinen jonkin klassisen moniston kanssa vaatii, että on määriteltävä diffeomorfismin käsite abstraktien monistojen välille ja sitten todistettava varsinainen väite, joka on edellä mainittu Whitneyn lause. Emme todista sitä, sillä todistus on hiukan epätriviaali emmekä sitä paitsi aio tarkastella muita kuin klassisia monistoja – usein kyllä käsitellen niitä abstrakteina monistoina.

Definition 23.21. Olkoon X abstrakti monisto ja U sen avoin osajoukko. Funktio $f : U \to \mathbb{R}$ on *sileä* U:ssa, jos se on *sileä jokaisella kartalla*, eli jos jokainen yhdistetty kuvaus

$$f \circ \varphi_\lambda^{-1} : B_\lambda \cap \varphi_\lambda(U) \to \mathbb{R}$$

on sileä.

f on *sileä pisteessä* $x \in X$, jos se on sileä jossain x:n ympäristössä.



Kuva 4: Sileä funktio abstraktilla monistolla

Remark 23.22. Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sileyden toteamiseksi pisteessä $x \in X$ riittää tutkia x:n mielivaltaista ympäristöä ja yhtä sellaista karttakuvausta, jolla $x \in U_\lambda$.

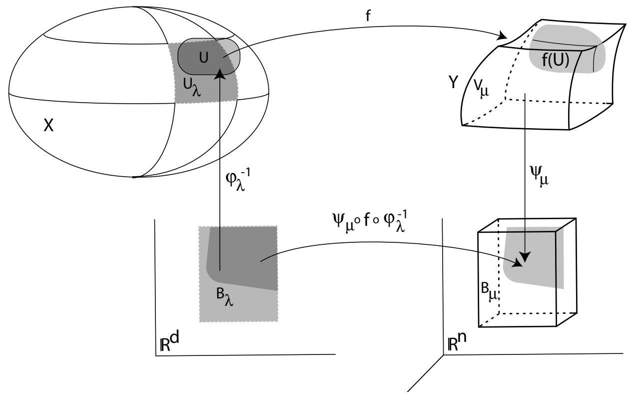
$f : U \to \mathbb{R}$ on sileä, jos ja vain jos f on sileä jokaisessa pisteessä $x \in U$. Sileys on siis lokaali ominaisuus eli sileät funktiot muodostavat funktiolyhteen.

Definition 23.23. Olkoot X ja Y kaksi abstraktia monistoa. Kuvaus $f : X \to Y$ on *sileä*, jos se on *sileä jokaisella kartalla kummallakin puolella* eli jos jokainen yhdistetty kuvaus

$$B_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda^{-1}} U_\lambda \xrightarrow{f} f(U_\lambda) \cap V_\mu \xrightarrow{\psi_\mu} B_\mu \subset R^n$$

on sileä määritelyjoukossaan $\varphi_\lambda^{-1}(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu))$, missä Y:n kartastoa on merkitty $\{\psi_\mu : V_\mu \to B_\mu\}_{\mu \in M}$.

f on *sileä pisteessä* $x \in X$, jos se on sileä jossain x:n ympäristössä.



Kuva 5: Sileä kuvaus 2-ulotteiselta monistolta X 3-ulotteiselle monistolle Y

Remark 23.24. Sileät monistot muodostavat kategorian, jossa objekteina ovat monistot ja morfismeina niiden väliset sileät kuvaukset. Isomorfismeja ovat monistojen väliset diffeomorfismit eli kumpaankin suuntaan sileät bijektiot. Nämä ovat tietenkin homeomorfismeja, ovathan sileät kuvaukset selvästikin jatkuvia.

23.4. **Lien ryhmät.**

Definition 23.25. *Topologinen ryhmä* on ryhmä G, joka on samalla topologinen avaruus, ja jossa sekä laskutoimitus $\circ : G \times G \to G$ että käänteisalkiokuvaus $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ ovat jatkuvia. Tulojoukko $G \times G$ on tässä tietenkin varustettu tulotopologialla.

Definition 23.26. *Lien ryhmä*[1] on ryhmä G, joka on samalla sileä monisto, ja jossa sekä laskutoimitus $\circ : G \times G \to G$ että käänteisalkiokuvaus $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ ovat sileitä. Tulojoukko $G \times G$ on tässä varustettava *tulomoniston* rakenteella, jonka määrittelemme pian.

Example 23.27. Kaikki tämän luvun alussa luetellut äärettömät ryhmät ovat Lien ryhmiä, vieläpä monistoina klassillisia monistoja eli valmiiksi euklidiseen avaruuteen upotettuja. Tarkastellaan aluksi, miksi ne ovat monistoja.

$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \, xw - yz \neq 0 \right\}$ on avoin joukko euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^4$. Euklidisena avoimena joukkona $GL_2(\mathbb{R})$ on 4-ulotteinen monisto, karttana identtinen kuvaus.

[1]Sophus Lie 1842 - 1899, norjalainen.

$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| xw - yz = 1 \right\}$ on suljettu joukko euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^4$. Osoitamme suoraan määritelmän mukaan, että $SL_2(\mathbb{R})$ on 3-ulotteinen sileä monisto. Aluksi valitaan karttaympäristöt, vaikkapa

$$U_x = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| xw - yz = 1, x \neq 0 \right\}$$
$$U_y = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| xw - yz = 1, y \neq 0 \right\}$$
$$U_z = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| xw - yz = 1, z \neq 0 \right\}$$
$$U_w = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| xw - yz = 1, w \neq 0 \right\}$$

Karttakuvauksiksi kelpaavat esimerkiksi

$$\varphi_x : U_x \to B_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\} : \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mapsto (x, y, z),$$
$$\varphi_y : U_y \to B_y = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\} : \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mapsto (x, y, w),$$
$$\varphi_z : U_z \to B_z = \{(x, z, w) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\} : \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mapsto (x, z, w),$$
$$\varphi_w : U_w \to B_w = \{(y, z, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w \neq 0\} : \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mapsto (y, z, w),$$

jotka on valittu siten, että pois jätetty koordianaatti voidaan joka kerta laskea muista ja ehdosta $xw - yz = 1$, jolloin saadaan karttakuvausten käänteiskuvaukset eli lokaalit parametrisoinnit:

$$\varphi_x^{-1} : B_x \to U_x : (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ z & \frac{yz+1}{x} \end{bmatrix},$$
$$\varphi_y^{-1} : B_y \to U_y : (x, y, w) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{xw-1}{y} & w \end{bmatrix},$$
$$\varphi_z^{-1} : B_z \to U_z : (x, z, w) \mapsto \begin{bmatrix} x & \frac{xw-1}{z} \\ z & w \end{bmatrix},$$
$$\varphi_w^{-1} : B_w \to U_w : (y, z, w) \mapsto \begin{bmatrix} \frac{yz+1}{w} & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

Nämä kaikki ovat ilmeisen sileitä, siis diffeomorfismeita. Klassisen määritelmän mukaan $SL_2(\mathbb{R})$ siis on sileä 3-ulotteinen monisto.

Laskemme harjoituksen ja havainnollisuuden vuoksi vielä kartanvaihtokuvauksetkin, joiden pitäisi abstraktin määritelmän mukaan olla $\mathbb{R}^3$:n avointen joukkojen välisiä diffeomorfismeja.

$$U_x \cap U_y = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \, xw - yz = 1, x \neq 0, y \neq 0 \right\}$$

$$\varphi_x(U_x \cap U_y) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, y \neq 0\} \subset B_x$$

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} : \varphi_y(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} U_x \cap U_y \xrightarrow{\varphi_y} \varphi_y(U_x \cap U_y) \subset B_y :$$
$$(x,y,z) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ z & \frac{yz+1}{x} \end{bmatrix} \mapsto (x, y, \frac{yz+1}{x}).$$

Tämä on sileä bijektio. Muut 7 kartanvaihtokuvausta ovat periaatteessa samanlaisia, pareittain toistensa käänteiskuvauksia, siis diffeomorfismeja.

$SL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \middle| \, xw - yz = 1 \right\}$ on vastaavalla tavalla kompleksinen monisto, ovathan rationaalifunktiot holomorfisia.

Muiden mainittujen ryhmien monistorakenteen tutkiminen jää harjoitustehtäväksi (tai tehdään myöhemmin).

Äärellisiä joukkoja, erityisesti ryhmiä voi pitää 0-ulotteisina monistoina.

KANNATTAISIKO TODETA JO TÄSSÄ EKSPLISIITTISESTI LIEN RYHMIKSI?

24. Tangenttiavaruudet ja tangenttikuvaukset

Klassisen sileän moniston tangenttiavaruuden määritelmän idea on seuraava: Tarkastellaan moniston $M \subset \mathbb{R}^n$ pistettä $\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_d)$, missä $\psi : B \to X$ on lokaali parametrisointi. Koska lokaali parametrisointi on sileä kuvaus, sillä on derivaatta pisteessä $x = (x_1, \dots, x_d) \in B \subset \mathbb{R}^d$. Tämä derivaatta on sellainen lineaarikuvaus $L = d_x\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, että x:n ympäristössä kuvaus $y \mapsto \psi(x) + L(y-x)$ on hyvä likiarvo kuvaukselle $y \mapsto \psi(y)$. Niinpä myös kuvajoukko, "taso" $\psi(x) + L(\mathbb{R}^d)$ on lokaalisti hyvä likiarvo joukolle $\psi(B)$, joka on pala monistoa M.

Tässä kuvatun "geometrisen intuition mukaisen" tangenttitason sijasta moniston *tangenttiavaruudeksi pisteessä* $\psi(x)$ sanotaan yleensä, ja niin myös seuraavassa aina, lokaalin parametrisoinnin derivaatan kuva-avaruutta $L(\mathbb{R}^d)$. Tähän on tietenkin syynä, että $L(\mathbb{R}^d)$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus ja siis vektoriavaruus. On tietenkin vielä täsmennettävä käytetyt käsitteet ja todistettava, että lokaalin parametrisoinnin avulla määritelty tangenttiavaruus ei riipu parametrisoinnin valinnasta.

24.1. **Sileän kuvauksen derivaatta.** Derivaatan määritelmä tähän— vrt Purmosen moniste ja YO TEKSTI.

Derivaatta on lineaarikuvaus. Derivoituvan, erityisesti sileän funktion derivaatan matriisi euklidisen avaruuden standardikannassa eli *Jacobin matriisi* muodostuu tunnetulla tavalla kuvauksen kaikkien komponenttien osittaisderivaatoista. Yleisemin funktion f derivaatta pisteessä b liittyy kuvauksen f suunnattuihin derivaattoihin tunnetulla tavalla:

$$d_b f\,(h) = \lim_{t\to 0}\frac{f(b+th)-f(b)}{t}.$$

Käytämme seuraavia käsitteitä: *Merkitty* sileä monisto (M, x_0) on sileä monisto, josta on valittu jokin piste $x_o \in M$. *Merkittyjen monistojen kategorian morfismi* $f : (M, x_0) \to (N, y_0)$ eli *merkittyjen monistojen* (M, x_0) *ja* (N, y_0) *välinen sileä kuvaus* on monistojen M ja N välinen sileä kuvaus, joka kuvaa pisteen x_0 pisteeksi y_0.

Seuraavien määritelmien tarkoitus on, että liitämme jokaiseen merkittyyn monistoon (M, x_0) *tangenttiavaruuden* T_xM, jolla on seuraavat ominaisuudet: Jokaiseen merkittyjen monistojen morfismiin

$$f : (M, x_0) \to (N, y_0)$$

liittyy lineaarikuvaus

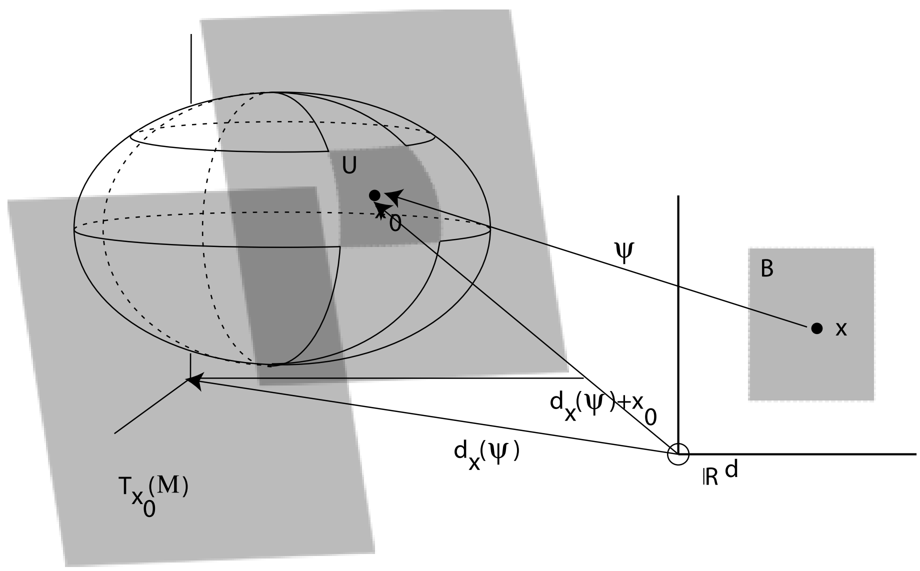
$$T_{x_0}f : (M, x_0) \to (N, y_0)$$

funktoriaalisesti eli siten, että

$$T_{x_0}(f \circ g) = T_{g(x_0)}f \circ T_{x_0}g,$$

kunhan yhdistetty morfismi $f \circ g$ on määritelty pisteessä x_0. Merkittyjen monistojen välisen sileän kuvauksen $f : (M, x) \to (N, y)$ *tangenttikuvaus* eli *derivaatta* on tämä lineaarikuvaus $T_{x_0}f : (M, x_0) \to (N, y_0)$.

Definition 24.1. Tarkastellaan d-ulotteisen moniston $M \subset \mathbb{R}^n$ pistettä $x_0 = \psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_d)$, missä $\psi : B \to X$ on lokaali parametrisointi. Koska lokaali parametrisointi on sileä kuvaus, sillä on derivaatta pisteessä $x = (x_1, \ldots, x_d) \in B \subset \mathbb{R}^d$. Moniston M *tangenttiavaruudeksi pisteessä* $x_0 = \psi(x)$ sanotaan derivaatan kuva-avaruutta: $T_{x_0}(M) = d_x\psi(\mathbb{R}^d)$.



Kuva 7: Ellipsoidin tangenttitaso

Definition 24.2. . Tarkastellaan merkittyjen monistojen välistä sileää kuvausta $f : (M, x) \to (N, y)$ sekä merkittyjen pisteiden ympäristöissä lokaalia parametrisointia $\psi : B \to U$, jossa erityisesti $b \mapsto x$ ja $\varphi : U' \to B'$, jossa $y \mapsto b' \in B'$. Merkitään ulotteisuuksia näin: $M \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^d, N \subset \mathbb{R}^n, B' \subset \mathbb{R}^{d'}$.

Kuvauksen f *tangenttikuvaus* eli *derivaatta* on derivaatta

$$d_b(\varphi \circ f \circ \psi) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}.$$

Remark 24.3. Määritelmä on hieman keskeneräinen; on vielä todistettava, että tämäkään määritelmä ei riipu karttojen/parametrisointien valinnasta.

Example 24.4. Selvitämme seuraavassa, miksi tangenttiavaruus ei riipu lokaalin parametrisoinnin valinnasta. Aloitamme tarkastelemalla yksityiskohtaisesti yhtä esimerkkiä, sileää monistoa $M = SL_2(\mathbb{R})$

kohdassa $x_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Käytetään lokaalia parametrisointia

$$\psi_x = \varphi_x^{-1} : B_x \to U_x : (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ z & \frac{yz+1}{x} \end{bmatrix} = (x, y, z, \frac{yz+1}{x}) \in \mathbb{R}^4.$$

Laskemalla osittaisderivaatat kohdassa $(1, 0, 0) = \varphi_x \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ saadaan Jacobin matriisiksi $\operatorname{Mat} d_{(1,0,0)}\psi_x$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \\ \frac{\partial \frac{yz+1}{x}}{\partial x} & \frac{\partial \frac{yz+1}{x}}{\partial y} & \frac{\partial \frac{yz+1}{x}}{\partial z} \end{bmatrix} \Bigg|_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{yz+1}{x^2} & \frac{z}{x} & \frac{y}{x} \end{bmatrix} \Bigg|_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämän lineaarikuvauksen kuvajoukko on etsitty tangenttiavaruus, joten se on sarakkeiden virittämä aliavaruus

$$\langle (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eli

$$T_I SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \, Tr \begin{bmatrix} z & y \\ z & w \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Laskemalla samalla tavalla muille parametrisoinneille saa tulokseksi saman tangenttiavaruuden $\subset \mathbb{R}^4$. Esimerkiksi parametrisoinnista

$$\psi_w = \varphi_w^{-1} : B_w \to U_w : (y, z, w) \mapsto \begin{bmatrix} \frac{yz+1}{w} & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

saadaan parametripisteessä $(y, z, w) = (0, 0, 1)$ derivaatta

$$\begin{bmatrix} \frac{z}{w} & \frac{y}{w} & -\frac{1+w}{w^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg|_{(0,0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

josta päätellään, että tangenttiavaruus on

$$T_I SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} -w & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \, y, z, w \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \, Tr \begin{bmatrix} z & y \\ z & w \end{bmatrix} = 0 \right\},$$

siis sama kuin toisenlaisella parametrisoinnilla laskettu.

Itse asiassa tässä esimerkissä on hyvin ymmärrettävää, että kummallakin parametrisoinnilla saadaan sama tangenttiavaruus: Karttakuvaukset φ_i ja niiden käänteiskuvaukset eli parametrisoinnit $\varphi_i^{-1} = \psi_i$ muodostavat kommutatiivisen kaavion:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \supset B_x \supset \varphi_x(U_x \cap U_w) & \xrightarrow{\psi_x} & U_x \cap U_w \\ \eta = \varphi_w \circ \psi_x \downarrow & \cdot & \downarrow I \\ \mathbb{R}^3 \supset B_w \supset \varphi_w(U_x \cap U_w) & \xrightarrow{\psi_w} & U_x \cap U_w \end{array}$$

Kartanvaihtokuvaus $\eta = \varphi_w \circ \psi_x$ on diffeomorfismi, jolla lisäksi $\eta(1,0,0) = \varphi_w\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0,0,1)$. Kaavion kuvaukset ovat sileitä. Derivoidaan kaikki kuvaukset. Ketjusäännön mukaan saadaan vastaava kaavio:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{d_{(1,0,0)}\psi_x} & \mathbb{R}^4 \\ d_{(1,0,0)}\eta = d_{(1,0,0)}(\varphi_w \circ \psi_x) \downarrow & & \cdot & \downarrow \text{identtinen kuvaus} \\ & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{d_{(0,0,1)}\psi_w} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Tästä näkyy heti, että $d_{(0,0,1)}\psi_w(\mathbb{R}^3) \subset d_{(1,0,0)}\psi_x(\mathbb{R}^3)$. Yhtäsuuruuden voi päätellä esimerkiksi vetoamalla tilanteen symmetriaan tai siihen, että kartanvaihtokuvaus η on diffeomorfismi, joten sen derivaatta on bijektio.

Theorem 24.5. *Moniston tangenttiavaruus annetussa pisteessä ei riipu valitusta lokaalista parametrisoinnista.*

Todistus. Todistus etenee samoin kuin edellisessä esimerkissä! $\square$

Remark 24.6. Muistetaan aikaisemmasta määritelmästä, että Lien ryhmä on joukko, jossa on sekä ryhmän että sileän moniston rakenne ja jossa kuvaukset $G \times G \to G : (x,y) \mapsto xy$ ja $x \mapsto x^{-1}$ ovat sileitä. Tässä tulojoukko $G \times G$ on varustettuna sileän *tulomoniston* rakenteella, joka määritellään siten, että kahden sileän moniston tulojoukkoon otetaan karttaympäristöiksi alkuperäisten karttaympäristöjen tulojoukot ja karttakuvauksiksi tulokuvaukset.

Definition 24.7. Kahden Lien ryhmän välinen *Lien ryhmähomomorfismi*, lyhyesti *morfismi*, on ryhmähomomorfismi, joka samalla on sileä kuvaus. *Lien ryhmäisomorfismi* on Lien rymähomomorfismi, jonka käänteinenkin on Lien ryhmähomomorfismi.

Remark 24.8. Lien ryhmähomomorfismeista yhdistetty kuvaus on Lien ryhmähomomorfismi, joten Lien ryhmät muodostavat kategorian.

Example 24.9. (1) $G = (\mathbb{R}, +)$ on Lien ryhmä, ovathan kuvaukset $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x + y$ ja $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$ sileitä.

(2) Tason kiertojen ryhmä eli ympyräryhmä S^1 on Lien ryhmä, kun sille annetaan moniston rakenne samaistamalla S^1 tason $\mathbb{R}^2$ yksikköympyrään

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

jolloin ryhmän laskutoimitus on

$$(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha) \circ (\cos 2\pi\beta, \sin 2\pi\beta) = (\cos 2\pi(\alpha + \beta), \sin 2\pi(\alpha + \beta))$$

ja lokaaliksi parametrisoinneiksi pisteen $(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$ ympäristössä kelpaa sileä kuvaus

$$\begin{aligned} \psi :]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[&\to S^1 \\ \theta &\mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta). \end{aligned}$$

Ryhmän S^1 laskutoimituksen sileys on nyt todettavissa suoraan määritelmien mukaan:

$$\begin{aligned}]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[\times]\beta - \epsilon, \beta + \epsilon[&\xrightarrow{\psi\times\psi'} S^1 \times S^1 \xrightarrow{\circ} S^1 \xrightarrow{\varphi}]\alpha + \beta - 2\epsilon, \alpha + \beta + 2\epsilon[\\ (\theta, \theta') &\overset{\psi\times\psi'}{\mapsto} ((\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta), (\cos 2\pi\theta', \sin 2\pi\theta')) \overset{\circ}{\mapsto} \\ &\overset{\circ}{\mapsto} (\cos 2\pi(\theta + \theta'), \sin 2\pi(\theta + \theta')) \overset{\varphi}{\mapsto} \theta + \theta'. \end{aligned}$$

Remark 24.10. Samalla saatiin esimerkki Lien ryhmähomomorfismista: Kuvaus

$$\iota : (\mathbb{R}, +) \to S^1 : \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$$

on selvästi ryhmähomomorfismi ja äskeisten tarkastelujen nojalla sileäkin. Se ei kuitenkaan ole injektio, joten se ei ole isomorfismi.

Example 24.11. Lisää esimerkkejä Lien ryhmähomomorfismeista:

(1) Koska $SO(n) \subset SL(n) \subset GL(n)$, ja kaikissa on laskutoimituksena matriisitulo ja klassinen moniston rakenne perittynä $\mathbb{R}^{2n}$:stä, niin inkluusiokuvaukset $SO(n) \to SL(n$ ja $SL(n) \to GL(n)$ ovat Lien ryhmähomomorfismeja.

(2) Ympyräryhmä S^1 muodostuu tason kierroista siinäkin mielessä, että kuvaus

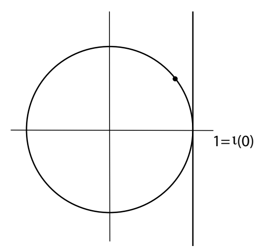
$$S^1 \to SO_{\mathbb{R}}(2) : (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \mapsto \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{bmatrix}$$

on Lien ryhmäisomorfismi. Tässä matriisiryhmä on avaruuden $\mathbb{R}^4$ osajoukkona määritelty klassillinen sileä monisto.

Myös ryhmä $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ varustettuna kompleksilukujen kertolaskulla ja samaistuksen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ antamalla sileän moniston rakenteella on S^1:n kanssa isomorfinen. Yksityiskohtaiset perustelut jäävät harjoitustehtäviksi.

Lasketaan suoraan määritelmien avulla Lien ryhmähomomorfismin $\iota : (\mathbb{R}, +) \to S^1$ tangenttikuvaus neutraalialkion kohdalla.

$$\begin{aligned} \iota : (\mathbb{R}, +) &\xrightarrow{\iota} S^1 : \\ \theta &\overset{\iota}{\mapsto} (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \\ 0 &\overset{\iota}{\mapsto} (1, 0) \\ d_0\iota : \mathbb{R} = T_0\mathbb{R} &\xrightarrow{d_0\iota} T_{(1,0)}S^1 = \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\overset{d_0\iota}{\mapsto} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta} \cos 2\pi\theta \\ \frac{\partial}{\partial\theta} \sin 2\pi\theta \end{bmatrix}_{\theta=0} [t] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \end{bmatrix} [t] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Kuva 8: Ympyrän S^1 tangenttiavaruus kohdassa $1 = \iota(0)$

25. Lien ryhmien esityksistä

Remark 25.1. Seuraavassa "vektoriavaruus" on aina äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus.

Definition 25.2. *Lien ryhmän G esitys* on, paitsi ryhmän G esitys vektoriavaruudessa V eli homomorfismi $G \to GL(V)$, myös sileä kuvaus, siis sama asia kuin Lien ryhmien homomorfismi $\rho : G \to GL(V)$.

Example 25.3. (1) Luonnollisesti niillä Lien ryhmillä, jotka jo määritelmällisesti muodostuvat lineaarikuvauksista, kuten $GL(n), O(n), SL(n)$ jne. on *tautologinen esitys*, joka on identtinen kuvaus.

(2) Kääntyvien reaalilukujen multiplikatiivisella ryhmällä $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ on monenlaisia esityksiä jo 2-ulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$:

(1) Toiminta luvulla itsellään kertomisena: $\lambda \mapsto \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in GL(2)$
(2) Toiminta luvun neliöllä ketomisena: $\lambda \mapsto \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \in GL(2)$
(3) Edellisten yleistykset: $\lambda \mapsto \begin{bmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \in GL(2)$; $(m, n \in \mathbb{Z})$
(4) Toiminta itseisarvon yleisillä potensseilla ketomisena: $\lambda \mapsto \begin{bmatrix} |\lambda|^\alpha & 0 \\ 0 & |\lambda|^\beta \end{bmatrix}$

Huomaamme, että nämä esitykset ovat redusoituvia, itse asiassa jo redusoituja. Kyseessä on abelin ryhmä. Äärellisen abelin ryhmän kompleksiset redusoitumattomat esitykset ovat 1-ulotteisia. Harjoitustehtäväksi jää pohtia, onko $\mathbb{R}^*$:llä kaksi-tai useampiulotteisia redusoitumattomia (sileitä) esityksiä.

26. Lineaari- ja multilinearilagebran täydennystä

26.1. Bilineaarikuvaukset.

Definition 26.1. Olkoot V, W ja U vektoriavaruuksia ja $\mathbb{F}$ niiden kerroinkunta. Kuvaus $B : V \times W \to U$ on *bilineaarinen*, jos sen kaikki osittaiskuvaukset

$$B(v, \cdot) : W \to U : w \mapsto B(v, w)$$

ja

$$B(\cdot, w) : V \to U : v \mapsto B(v, w)$$

ovat lineaarisia.

Example 26.2. Lähes kaikki lineaarialgebrassa "tuloiksi" sanotut kuvaukset ovat bilineaarikuvauksia. Tarkemmin sanoen ainakin seuraavat ovat bilineaarikuvauksia:

(1) reaalilukujen tulo xy
(2) kompleksilukujen tulo zz'
(3) vektorin ja luvun tulo λv
(4) vektorien reaalinen sisätulo $(v|w)$
(5) matriisitulo AB,
(6) erityisesti matriisin ja vektorin tulo Ax
(7) lineaarikuvauksen arvon laskeminen Tv,
(8) erityisesti lineaarimuodon arvon laskeminen $< v|u'\rangle$
(9) funktioiden, erityisesti polynomien pisteittäinen tulo fg
(10) vektorien tensoritulo $x \otimes y$

(11) lineaarikuvausten tensoritulo $T \otimes S$

26.2. **Kahden vektoriavaruuden tensoritulo.**

Definition 26.3. Vektoriavaruuden V osajoukko $K \subset V$ on *vapaa* eli sen alkiot ovat *lineaarisesti riippumattomia*, jos ainoa tapa lausua nollavektori joidenkin joukkoon K kuuluvien vektorien lineaarikombinationa on triviaali $0 = \sum_{j=1}^{n} 0v_j,\ v_j \in K,\ n \in \mathbb{N}$.

Vektoriavaruuden V osajoukko $K \subset V$ *virittää avaruuden* V, mikäli jokainen vektori $v \in V$ on joidenkin joukkoon K kuuluvien vektorien lineaarikombinatio $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$; $v_j \in K$, $n \in \mathbb{N}$.

Vektoriavaruuden V *kanta* eli *Hamel-kanta* on vapaa joukko $K \subset V$, joka virittää vektoriavaruuden V.

Remark 26.4. Joukko $K \subset V$ on vektoriavaruuden V kanta tasan sillä ehdolla, että jokainen vektori $v \in V$ voidaan lausua kantavektorien lineaarikombinaationa $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$, missä $\lambda_j \in \mathbb{F}$, $v_j \in K$, $n \in \mathbb{N}$, ja tämä esitys on yksikäsitteinen.

Lineaarikombinaatiota $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$, missä $\lambda_j \in \mathbb{F}$, $v_j \in K$, $n \in \mathbb{N}$, merkitään usein lyhemmin $v = \sum_K \lambda_k k$, missä tietenkin vain äärellisen moni kertoimista λ_k on nollasta eroava.

Vektoriavaruuden kannat ovat yhtä mahtavia joukkoja. Vektoriavaruus on d-ulotteinen tasan silloin, kun sillä on d-alkioinen kanta. Valinta-aksiooman avulla voi todistaa, että jokaisella vektoriavaruudella on kanta.

Lineaarikuvaus vektoriavaruudelta toiselle määräytyy yksikäsitteisesti kanta-alkioiden kuvista ja nämä voi valita miten tahansa. Erityisesti äärellisulotteisten avaruuksien välisten lineaarikuvausten esittäminen kannan avulla matriiseina perustuu tähän. Myös bilineaarikuvauksella on sama ominaisuus: bilineaarinen $B : V \times W \to U$ määräytyy täysin arvoista $B(k,l)$, missä k läpikäy V:n kannan K ja l W:n kannan L, onhan $B\left(\sum_K \lambda_k k, \sum_L \mu_l l\right) = \sum_{K\times L} \lambda_k \mu_l kl$.

Definition 26.5. Joukon K *virittämä vapaa vektoriavaruus* $\mathbb{F}^{(K)}$ on vektoriavaruus, jonka kanta on joukko K.

Remark 26.6. Joukon K virittämä vapaa vektoriavaruus on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen. Lisäksi se on aina olemassa: Jokainen joukko K virittää jonkin vapaan vektoriavaruuden, sillä joukon K virittämä vapaa vektoriavaruus $\mathbb{F}^{(K)}$ voidaan muodostaa seuraavasti: Olkoon $\mathbb{F}^K =$

$\{f \mid f$ on funktio $K \to \mathbb{F}\}$. Selvästi $\mathbb{F}^K$ on vektoriavaruus. Määritellään $\mathbb{F}^{(K)}$:ksi aliavaruus $\mathbb{F}^{(K)} = \{f \in \mathbb{F}^K \mid f(k) \neq 0$ vain äärellisen monella $k \in K\}$. Lopuksi samaistetaan K osajoukoksi $K \subset \mathbb{F}^{(K)}$ samaistamalla alkio $l \in K$ kuvaukseen $k \mapsto \delta_{lk}$, missä δ_{kl}=1, jos $k = l$ ja 0 muuten. Näin merkiten jokainen $f \in V$ on äärellinen summa[2] $f = \sum_{k \in K} \lambda_k k$, missä $\lambda_k = f(k)$.

Kaikenkaikkiaan siis jokainen vektoriavaruus on vapaa vektoriavaruus ja jokainen joukko kelpaa kannaksi jollekin vektoriavaruudelle.[3]

Remark 26.7. Määrittelemme seuraavassa kahden vektoriavaruuden V ja W tensoritulon avaruutena $V \otimes W$ ja siihen liittyvänä bilineaarikuvauksena $V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W$. Määrittelemisen voi tehdä monella eri tavalla riippuen siitä, mitä tensoritulon ominaisuuksia valitsemme määritelmään kuuluviksi ja mitkä muut kiinnostavat ominaisuudet jäävät todistettaviksi. Valitsemamme määritelmän kannalta seuraavat ominaisuudet jäävät todistettaviksi lauseiksi:

(1) Vektoriavaruuksien V ja W tensoritulo on seuraavassa mielessä yleisin mahdollinen eli *universaalinen bilineaarikuvaus* joukossa $V \times W$: Jokainen bilineaarikuvaus $B : V \times W \to U$ on esitettävissä muodossa $B = L \circ \otimes$, missä $L : V \otimes W \to U$ on yksikäsitteisesti bilineaarikuvauksesta B määräytyvä lineaarikuvaus.

$$
\begin{array}{ccc}
V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\
 & \overset{B}{\searrow} & \downarrow L \\
 & & U
\end{array}
$$

On tietenkin todistettava, että tällainen bilineaarikuvaus on olemassa ja bilineaarikuvausten isomorfiaa vaille yksikäsitteinen.

(2) Kahden vektoriavaruuden $V = \mathbb{F}^{(K)}$ ja $W = \mathbb{F}^{(L)}$ tensoritulo osoittautuu vapaaksi vektoriavaruudeksi $V \otimes W = \mathbb{F}^{(K)} \otimes \mathbb{F}^{(L)} = \mathbb{F}^{(K \times L)}$ varustettuna bilineaarikuvauksella

$$V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W,$$

[2]vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä!

[3]Jos vektoriavaruuden kerroinkunta korvataan pelkällä renkaalla, niin saadaan modulin käsite. Vapaa moduli määritellään oleellisesti kuten vapaa vektoriavaruus. Kaikki modulit eivät ole vapaita.

jolle kantavektoripari (k, l) kuvautuu kantavektoriksi $(k, l) \in V \otimes W = \mathbb{F}^{(K \times L)}$. Erityisesti $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$. Tensoritulon kantavektoreita merkitään yleensä $\otimes(k, l) = k \otimes l$. Tensoritulon $V \otimes W$ alkiot ovat siten muotoa

$$\sum_{(k,l) \in K \times L} \lambda_{k,l}\, k \otimes l$$

olevia äärellisisä summia, ja bilineaarikuvaus $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ on

$$(\sum_{k \in K} \lambda_k\, k) \otimes (\sum_{l \in L} \mu_l\, l) = \sum_{(k,l) \in K \times L} \lambda_k \mu_l\; k \otimes l.$$

Bilineaarisuus ilmenee näin merkiten kaavoina:

$$\begin{aligned} (v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w \\ \lambda \cdot (v \otimes w) &= (\lambda \cdot v) \otimes w \\ v \otimes (w + w') &= v \otimes w + v \otimes w' \\ \lambda \cdot (v \otimes w) &= v \otimes (\lambda \cdot w) \end{aligned}$$

kaikille $v, v', \in V,\ w, w' \in W,\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Näistä ominaisuuksista ei ehkä heti ole ilmeistä, että tensoritulo $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ on bilineaarikuvausten isomorfiaa vaille yksikäsitteinen, erityisesti kannoista riippumaton. [4]

Seuraava tensoritulon määritelmä sisältäätensoritulon konstruktion, siis olemassaolotodistuksen, käyttämättä kantoja. Tämä määrittelytapa on yleistyskelpoinen ja käytämme sitä kohta uudelleen määritellessämme symmetrisen ja ulkoisen potenssin.

Definition 26.8. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kerroinkuntana jokin $\mathbb{F}$. Tarkastellaan vapaata vektoriavaruutta $\langle V \times W \rangle$, jonka kantana on koko tulojoukko $V \times W$ ja muut vektorit ovat siis kantavektoreiden $(v, w) \in \langle V \times W \rangle$ äärellisiä lineaarikombinaatioita. Ideana on nyt samaistaa avaruudessa $\langle V \times W \rangle$ esimerkiksi $((\lambda v), w)$, ja $\lambda(v, w)$ sekä $(v + v', w)$ ja $(v, w) + (v', w)$. Tämä tapahtuu siirtymällä sopivaan tekijäavaruuteen. Olkoon $R \subset V \times W$ suppein aliavaruus, joka sisältää seuraavat vektorit kaikilla $v, v' \in V,\ w, w' \in W$ ja $\lambda \in \mathbb{F}$:

(1) $(v + v', w) - (v, w) - (v', w)$
(2) $\lambda(v, w) - (\lambda v, w)$
(3) $(v, w + w') - (v, w) - (v, w')$

[4] On myös ikävää vedota määritelmässä vektoriavaruuden kannan olemassaoloon, joka perustuu valinta-aksioomaan eikä yleisty moduleille

(4) $\lambda(v,w) - (v,\lambda w)$

Määritellään tensoritulon avaruus tekijäavaruutena: $V \otimes W = \frac{\langle V\times W\rangle}{R}$. Lopuksi varustetaan tensoritulo bilinaarikuvauksella

$$\begin{aligned} \otimes : V \times W &\to \langle V \times W\rangle \to V \otimes W \\ (v,w) &\mapsto \quad (v,w) \quad \mapsto v \otimes w = (v,w) + R. \end{aligned}$$

Ainakin kuvaus $\otimes$ on kahden kuvauksen yhdistettynä kuvauksena hyvin määritelty.

On syytä tarkastaa, että kuvaus $\otimes$ on bilineaarinen: Kaikilla $v, v' \in V$, $w \in W$:

$$\begin{aligned} (v+v',w) &\mapsto (v+v') \otimes w = (v+v',w) + R \\ (v,w) &\mapsto v \otimes w = (v,w) + R \\ (v',w) &\mapsto v' \otimes w = (v',w) + R. \end{aligned}$$

Koska aliavaruuden R määrittelevän ehdon (1) nojalla $(v+v',w) - (v,w) - (v',w) \in R$, niin

$$(v+v',w) + R = ((v,w)+R) + ((v',w)+R),$$

eli

$$(v+v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w.$$

Muut bilineaarisuuden ehdot todistetaan samalla tavalla ehdoista (2),(3) ja (4).

Remark 26.9. Näin on tensoritulo määritelty. Todistetaan, että sillä on toivomamme ominasuudet (1) ja (2)

(1) Todistetaan tekijäkuvauksena määritellyn bilineaarikuvauksen $\otimes$ universaalisuus. Olkoon siis $B : V \times W \to P$ jokin bilineaarikuvaus. Tehtävänä on löytää lineaarikuvaus $L : V \times W \to P$ siten, että diagramma

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \overset{B}{\searrow} & \downarrow L \\ & & P \end{array}$$

kommutoi eli $B = L \circ \otimes$. Pitää lisäksi näyttää, että tällaisia lineaarikuvauksia on vain yksi. Yksikäsitteisyys on ilmeinen, sillä ainoa ehdokas kuvaukseksi L kuvaa tietenkin yksinkertaiset vektorit näin:

$$L : v \otimes w \mapsto B(v,w)$$

ja määräytyy näistä avaruuden $V \otimes W$ virittäjäalkioiden kuvista. Tehtäväksi jää siis vain konstruoida lineaarikuvaus L, joka kuvaa virittäjäalkiot halutulla tavalla, vaikka ne eivät ole lineaarisesti riippumattomia eikä niiden kuvia siis voi valita vapaasti. Lineaarikuvauksen L voi konstruoida näin: Aloitetaan määrittelemällä lineaarikuvaus $\tilde{L} : \langle V \times W \rangle \to P$ antamalla avaruuden $\langle V \times W \rangle$ kantavektorien kuvat: $(v, w) \mapsto B(v, w)$. Osoitetaan, että $\tilde{L}$ voidaan kierrättää tekijäavaruuden kautta, eli että on olemassa lineaarikuvaus $L : V \otimes W \to P$, jolle $\tilde{L} = L \circ \phi$, eli

$$\begin{array}{ccc} \langle V \times W \rangle & \xrightarrow{\phi} & V \otimes W \\ & \overset{\tilde{L}}{\searrow} & \downarrow L \\ & & P \end{array}$$

missä ϕ on kanoninen surjektio

$$\begin{aligned} \langle V \times W \rangle \to \frac{\langle V \times W \rangle}{R} &= V \otimes W \\ (v, w) \mapsto (v, w) + R &= v \otimes w. \end{aligned}$$

Tällainen L on olemassa, koska $\operatorname{Ker} \phi = R \subset \operatorname{Ker} \tilde{L}$. Tämä todetaan huomaamalla, että jos $a + R = b + R \in \frac{\langle V \times W \rangle}{R} = V \otimes W$, niin $a - b \in R \subset \operatorname{Ker} \tilde{L} \subset \langle V \times W \rangle$, josta seuraa, että $\tilde{L}a = \tilde{L}b$. Kuvaus

$$V \otimes W \to P : a + R \mapsto \tilde{L}a$$

on siis hyvin määritelty ja tietenkin lineaarinen.

(2) Avaruuden $\langle V \times W \rangle$ kantavektoreiden kuvat eli tekijäavaruuden vektorit $v \otimes w$, missä $v \in V$ ja $w \in W$, eivät tietenkään kaikki ole lineaarisesti riippumattomia, vaan esimerkiksi totesimme edellä, että

$$(v + v') \otimes w - v \otimes w - v' \otimes w = 0,$$

mutta ne virittävät avaruuden $V \otimes W = \frac{\langle V \times W \rangle}{R}$, jonka alkiot eli *tensorit* siis ovat äärellisiä summia näistä *yksinkertaisista tensoreista*. Jos K on avaruuden V kanta ja L avaruuden W kanta, niin V:n alkiot ovat äärellisisä summia $\sum_{k \in K} \lambda_k \, k$ ja W:n alkiot $\sum_{l \in L} \mu_l \, l$, joten tensoritulon alkiot ovat äärellisiä summia

$$(\sum_{k \in K} \lambda_k \, k) \otimes (\sum_{l \in L} \mu_l \, l) = \sum_{(k,l) \in K \times L} \lambda_k \mu_l \; k \otimes l = \sum_{(k,l) \in K \times L} \rho_{k,l} \; k \otimes l.$$

Alkuperäisten kantavektorien tensoritulot virittävät siis tensorituloavaruuden $V \otimes W$. Niiden lineaarinen riippumattomuus vaatii pienen todistuksen:

Olkoon
$$\sum_{(k,l)\in K\times L} \lambda_{k,l}\; k\otimes l = 0 \in V\otimes W.$$

Bilineaarikuvauksen $\otimes$ universaalisuus takaa, että jokaiselle bilineaarikuvaukselle $B : V\times W \to \mathbb{F}$ on olemassa lineaarikuvaus $L : V\times W \to P$ siten, että diagramma

$$\begin{array}{ccc} V\times W & \xrightarrow{\otimes} & V\otimes W \\ & \overset{B}{\searrow} & \downarrow L \\ & & \mathbb{F} \end{array}$$

kommutoi eli $B = L\circ\otimes$. Erityisesti jokaiselle bilineaarikuvaukselle $B : V\times W \to \mathbb{F}$ on $\sum_{(k,l)\in K\times L}\lambda_{k,l}\; B(k,l) = 0$. Mutta bilineaarikuvauksen arvot kantavektoripareilla voi valita vapaasti, joten $\sum_{(k,l)\in K\times L}\lambda_{k,l}\; B_{k,l} = 0$ kaikilla valinnoilla $B_{k,l}\in\mathbb{F}$, joten jokainen $\lambda_{k,l}$ on 0. $\square$

Example 26.10. Olkoon $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ ja $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{f_1,\dots,f_m\}$ niiden kannat. Silloin $V\otimes W = \mathbb{R}^{nm}$, joka vektoriavaruutena on sama kuin kaikkien $n\times m$-matriisien avarus $\mathbb{R}^{n\times m}$. Erityisesti avaruuksien tensoritulolle $V\otimes W$ saadaan kantavektoreiksi alkuperäisten kantavektorien tensoritulot

$$e_i\otimes f_j = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & (j) \\ (i) & \end{array} = [\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}]_{\alpha,\beta}.$$

Näissä kannoissa saadaan siis yleisten vektorien tensorituloksi eli yksinkertaiseksi tensoriksi $(a_1,\dots,a_n)\otimes(b_1,\dots b_m)$ [5]

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m \end{bmatrix}, \text{ joka on } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

Tulomatriisista näkee, että sen sarakkeet ovat lineaarisesti riippuvia, joten sen *ranki* eli kuva-avaruuden dimensio on 1 (tai 0). On ilmeistä, että jokainen 1-rankinen matriisi syntyy näin ja esittää siis kannassa yksinkertaista tensoria.

[5] Ei ole Kroneckerin tulo?!

26.3. **Symmetriset ja alternoivat bilineaarikuvaukset.**

Definition 26.11. Olkoot V ja P vektoriavaruuksia.

(1) Bilineaarikuvaus $B : V \times V \to P$ on *symmetrinen*, jos
$$B(v, w) = B(w, v) \quad \forall v, w \in V.$$
(2) Bilineaarikuvaus $B : V \times V \to P$ on *alternoiva*, jos
$$B(v, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Remark 26.12. Kun vektoriavaruuden kuntana $\mathbb{F}$ on $\mathbb{C}$ tai joku sen alikunta[6], niin bilineaarikuvaus $B : V \times V \to P$ on alternoiva, jos ja vain jos se on *antikommutatiivinen*:
$$B(v, w) = -B(w, v) \quad \forall v, w \in V,$$
sillä, jos B on alternoiva, niin $0 = B(v+w, v+w) = B(v, v)+B(v, w)+ B(w, v) + B(w, w) = 0 + B(v, w) + B(w, v) + 0$ ja jos oletetaan, että B on antikommutatiivinen, niin $0 = B(x, x) + B(x, x) = 2B(x, x)$, joten $B(x, x) = 0$.

Example 26.13. Perusesimerkki symmetrisestä bilineaarikuvauksesta on polynomien tulo:

Olkoon $V = \mathbb{F}[x] = \{f \mid f$ on $\mathbb{F}$-kertoiminen yhden muuttujan polynomi$\}$. Tavallinen polynomien kertolasku on symmetrinen bilineaarikuvaus $V \times V \to V$. Sama pätee tietenkin useamman muuttujan polynomeille eli avaruudessa $V = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_d]$.

Yleisemmin, missä tahansa kommutatiivisessa $\mathbb{F}$-algebrassa A sisäinen kertolasku $A \times A \to A$ on $\mathbb{F}$-bilineaarinen ja symmetrinen; itse asiassa *kommutatiivinen* $\mathbb{F}$*-algebra* on määritelmän mukaan $\mathbb{F}$-vektoriavaruus, jossa lisäksi on annettuna symmetrinen bilineaarikuvaus $B : A \times A \to A$. [7]

Example 26.14. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kahden vektorin ”ristitulo” on esimerkki alternoivasta bilineaarikuvauksesta. Perusesimerkki alternoivasta bilineaarikuvauksesta on kuitenkin 2×2-matriisin determinantti:

[6] Riittää, että $2 \neq 0$ kunnassa $\mathbb{F}$.

[7] Yleensäkin, jos bilineaarikuvaus $B : A \times A \to A$ on assosiatiivinen niin $(A, +, B)$ on samalla vektoriavaruus ja rengas, jolloin sanotaan, että A on *assosiatiivinen algebra*. Assosiatiivinen algebra ei aina ole kommutatiivinen eikä *yleinen algebra* eli pelkkä bilineaarikuvaus assosiatiivinen. Erityisesti Lien algebra ei ole kumpaakaan.

Olkoon $V = \mathbb{R}^2$. Kuvaus, joka kahteen vektoriin $v = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ ja $w = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ liittää determinantin $B(v, w) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ on alternoiva bilineaarikuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$.

26.4. **Multilineaarikuvaukset.** On luonnollista yleistää determinanttia koskeva esimerkki avaruuteen $\mathbb{R}^d$. Determinantti on jokaisen sarakkeen lineaarifunktio ja saa arvon 0, mikäli kaksi saraketta ovat samoja. Viimeistään tämä antaa aiheen määritellä d:n muuttujan multilineaarikuvaukset, erityisesti symmetrisiset ja alternoivat.

Definition 26.15. Olkoot $V_1, \dots, V_n$ ja P vektoriavaruuksia ja $\mathbb{F}$ niiden yhteinen kerroinkunta.

(1) Kuvaus $M : V_1 \times \dots \times V_n \to P$ on *multilineaarinen*, tässä tapauksessa $n-$*lineaarinen*s, mikäli sen kaikki osittaiskuvaukset

$$\begin{aligned} V_1 \to P &: v_1 \mapsto M(v_1, \dots, v_n), \\ V_2 \to P &: v_2 \mapsto M(v_1, \dots, v_n), \\ &\dots \\ V_n \to P &: v_n \mapsto M(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

ovat lineaarisia.

(2) n-lineaarikuvaus $M : V^n \to P$ on *symmetrinen*, jos $M(v_1, \dots, v_n)$ ei riipu muuttujien $v_1, \dots, v_n$ järjestyksestä, ts. kaikilla permutaatioilla $\sigma \in S_n$ pätee

$$M(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = M(v_1, \dots, v_n)$$

(3) n-lineaarikuvaus $M : V^n \to P$ on *alternoiva*, jos

$$M(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ aina, kun } v_i = v_j \text{ joillekin } i \neq j.$$

Remark 26.16. Kun $\mathbb{F}$ on $\mathbb{C}$:n alikunta, niin multilineaarikuvauksen alternoivuus on yhtäpitävää sen kanssa, että $M(v_1, \dots, v_n) = 0$ aina, kun $v_1, \dots, v_n$ ovat lineaarisesti riippuvat. Samaan johtaa vaatimus, että kuvaus vaihtaa aina merkkiä, kun kaksi muuttuja vaihdetaan keskenään. Klassinen esimerkki alternoivasta n-lineaarikuvauksesta on tietenkin determinantti tulkittuna niin, että muuttujina ovat $n \times n$-matriisin sarakkeet.

26.5. **Symmetriset ja ulkoiset potenssit.** Seuraavaksi yleistämme kahden vektoriavaruuden tensoritulolle kehittämämme teorian useamman avaruuden tensoritulolle ja myös erikseen symmetriselle ja alternoivalle tulolle.

Definition 26.17. Olkoot $V_1 \times \cdots \times V_n$ ($\mathbb{F}$-) vektoriavaruuksia. n-lineaarikuvaus $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ on avaruuksien $V_1, \ldots, V_n$ *tensoritulo* ja merkitään $W = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, mikäli $\otimes$ on seuraavassa mielessä *universaalinen n-lineaarikuvaus*:

Jokainen $n-$lineaarikuvaus $M : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U$ on esitettävissä muodossa $B = L \circ \otimes$, missä $L : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U$ on yksikäsitteisesti $n-$lineaarikuvauksesta M määräytyvä lineaarikuvaus.

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \cdots \times V_n & \xrightarrow{\otimes} & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \\ & \overset{M}{\searrow} & \downarrow L \\ & & U \end{array}$$

Kahden vektoriavaruuden tensoritulon konstruktio yleistyy välittömästi useamman avaruuden tilanteeseen ja osoittaa, että tensoritulo on olemassa. Saman tuloksen saa myös huomaamalla, että $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$:ksi kelpaa $(\ldots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots \otimes V_n)$. Joka tapauksessa tensoritulon kannaksi kelpaa $K_1 \times \cdots \times K_n$, missä K_j on alkuperäisen avaruuden V_j kanta. Erityisesti d-kertaisen *tensoripotenssin* $\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^{\otimes d}$ kantavektoreiksi voi valita kaikki $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$, missä $\{e_1, \ldots, e_n\}$ on alkuperäisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta.

Samalla periaatteella, jolla multilineaarikuvauksen käsitteestä muodostettiin vektoriavaruuksien tensoritulon käsite, voidaan symmetrisen ja alternoivan multilineaarikuvauksen käsitteestä muodostaa vektoriavaruuksien symmetrisen ja alternoivan eli ulkoisen potenssin käsitteet.

Definition 26.18. Olkoon V ($\mathbb{F}$-) vektoriavaruus. Symmetrinen n-lineaarikuvaus $\cdot : V \times \cdots \times V = V^n \to W$ on avaruuden V n:s *symmetrinen potenssi* $W = S^nV$, mikäli se on seuraavassa mielessä *universaalinen symmetrinen n-lineaarikuvaus*:

Jokainen symmetrinen $n-$lineaarikuvaus $M : V^n \to U$ on esitettävissä muodossa $M = L \circ \cdot$, missä $L : S^nV \to U$ on yksikäsitteisesti symmetrisestä $n-$lineaarikuvauksesta M määräytyvä lineaarikuvaus.

$$\begin{array}{ccc} V^n & \xrightarrow{\cdot} & S^nV \\ & \overset{M}{\searrow} & \downarrow L \\ & & U \end{array}$$

Symmetrisen potenssin olemassaolo todistetaan konstruoimalla sellainen, mikä käy joko kantoja tai tekijäavaruuksia käyttämällä. Sivuutamme konstruktion, koska se on oleellisesti sama kuin seuraava, jossa konstruoidaan ulkoinen potenssi. Huomataan kuitenkin, että symmetrisen tulon kannaksi voi ottaa kaikki ne alkuperäisten kantavektorien tulot $e_{i_1} \cdots \cdot e_{i_d}$, missä $i_1 \leq \cdots \leq i_n$, kun indeksijoukko I on järjestetty.

Example 26.19. Olkoon $V = \{n$:n muuttujan asteen 1 homogeeniset polynomit$\} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Silloin $S^d V = \{n$:n muuttujan asteen d homogeeniset polynomit$\}$, esimerkiksi

$$S^2V = \langle x_1^2, x_1x_2, x_1x_2, \ldots x_1x_n, x_2^2, x_2x_3, \ldots, \ldots x_n^2 \rangle.$$

Tässä esimerkissä "muodollinen" symmetrinen tulo on sama asia kuin poloynomien tavallinen tulo.

Definition 26.20. Olkoon V ($\mathbb{F}$-) vektoriavaruus. Alternoiva n-lineaarikuvaus $\wedge : V \times \cdots \times V = V^n \to W$ on avaruuden V n:s *ulkoinen potenssi* $W = \Lambda^n V$, mikäli se on seuraavassa mielessä *universaalinen alternoiva n-lineaarikuvaus*:

Jokainen alternoiva $n-$lineaarikuvaus $M : V^n \to U$ on esitettävissä muodossa $M = L \circ \wedge$, missä $L : \Lambda^n V \to U$ on yksikäsitteisesti alternoivasta $n-$lineaarikuvauksesta M määräytyvä lineaarikuvaus.

$$\begin{array}{ccc} V^n & \xrightarrow{\wedge} & \Lambda^n V \\ & \overset{M}{\searrow} & \downarrow L \\ & & U \end{array}$$

Ulkoisen potenssin olemassaolo todistetaan konstruoimalla sellainen. Käymme konstruktion läpi tapauksessa, jossa $n = 2$. Kuten tensorituloa konstruoitaessa voi nytkin aloittaa muodostamalla vektoriavaruuden $\langle V^2 \rangle$, jonka kantana on koko joukko V^2. Sitten määritellään aliavaruus R, jonka virittävät jo tensoritulon yhteydessä mainitut "relaatiot" ja yksi uusi. Tarkemmin sanoen $R \subset V^2$ on suppein aliavaruus, joka sisältää seuraavat vektorit kaikilla $v, v'w, w' \in V$ sekä $\lambda \in \mathbb{F}$:

(1) $(v + v', w) - (v, w) - (v', w)$
(2) $\lambda(v, w) - (\lambda v, w)$
(3) $(v, w + w') - (v, w) - (v, w')$
(4) $\lambda(v, w) - (v, \lambda w)$
(5) $(v, w) + (v, w)$

Nyt tekijäavaruudella $\Lambda^2 V = \frac{\langle V^2 \rangle}{R}$ on ulkoisen potenssin määrittelevä universaaliominaisuus, kun se varustetaan bilinaarikuvauksella

$$\begin{aligned} \wedge : V \times V \ &\rightarrow \langle V^2 \rangle \rightarrow \Lambda^2 V \\ (v, w) &\mapsto (v, w) \mapsto v \wedge w = (v, w) + R. \end{aligned}$$

Bilineaarikuvauksen $\wedge$ alternoivuus saadaan ehdosta (5). Alternoivana bilineaarikuvauksena $\wedge$ toteuttaa bilineaariset laskusäännöt:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x \wedge y) &= (\lambda \cdot x) \wedge y = x \wedge (\lambda \cdot y) \\ (x + y) \wedge z &= x \wedge z + y \wedge z \\ x \wedge (z + w) &= x \wedge z + x \wedge w \end{aligned}$$

ja lisäksi alternoinnin

$$v \wedge w = -w \wedge v.$$

Universaaliominaisuuden toteuttava ulkoinen tulo on siis olemassa.

Alkuperäisen avaruuden V kantavektoriparien kuvat $e_i \wedge e_j$ virittävät tietenkin taas koko avaruuden $\Lambda^2 V = \frac{\langle V \times W \rangle}{R}$, jonka alkiot siis ovat äärellisiä summia niistä. Jos V:n kanta K on järjestetty joukko, niin jo ne tulot, $e_k \wedge e_l$ joilla $k < l$, virittävät avaruuden $\Lambda^2 V$, sillä $e_k \wedge e_l = 0$, kun $k = l$ ja $e_k \wedge e_l = -e_l \wedge e_k$, kun $k > l$. Jäljelle jääneiden kantavektoriehdokkaiden lineaarinen riippumattomuus todistetaan oleellisesti samalla tavalla kuin vastaava lause **??** tensoritulolle. Erityisesti äärellisulotteisessa tapauksessa $V = \mathbb{R}^d$ kannaksi silloin tulee $\{e_k \wedge e_l \mid k < l\} = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, \ldots e_1 \wedge e_d, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, \ldots e_2 \wedge e_d, e_3 \wedge e_4, \ldots, \ldots e_{d-1} \wedge e_d, \}$, joten $\dim(\Lambda^2 V) = \frac{1}{2} n(n-1)$.

Example 26.21. Olkoon $V = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sen kanta. Silloin $\Lambda^2 V$ voidaan vektoriavaruutena samaistaa kaikkien antisymmetristen $n \times n$-neliömatriisien avaruuteen.

Remark 26.22. Vastaavat tarkastelut pätevät korkeammille potensseille $\Lambda^n V$. Erityisesti, jos V:n kanta K on järjestetty joukko, niin ulkoisen potenssin $\Lambda^n V$ kantavektoreiksi voidaan valita kaantavektoreiden ulkoiset tulot $e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_d}$, joilla $k_1 < k_2 < \cdots < k_d$.

Example 26.23. Edellisen mukaan $\Lambda^d \mathbb{R}^d$ on yksiulotteinen, ainoana kantavektorina esimerkiksi $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d$. Muistamme, että $n \times n$-matriisin determinantti on sarakkeiden alternoiva bilineaarikuvaus kuntaan $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^n & \xrightarrow{\wedge} & \Lambda^n \mathbb{R}^n \sim \mathbb{R} \\ & \overset{\text{det}}{\searrow} & \downarrow L = \lambda \cdot \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Huomaamme, että determinantti on vakiokerrointa vaille ainoa alternoiva n-lineaarikuvaus n-ulotteisesta avaruudesta luvuille. Sama pätee tietenkin, vaikka kerroinkunta ei olisi $\mathbb{R}$.

27. Tensoritulot ja esitykset

Example 27.1. Esimerkissä **??** tarkasteltiin n:n muuttujan asteen d homogeenisten polynomien avaruutta $S^dV = \{n$:n muuttujan asteen d homogeeniset polynomit$\}$, esimerkiksi

$$S^2V = \langle x_1^2, x_1x_2, x_1x_2, \dots x_1x_n, x_2^2, x_2x_3, \dots, \dots x_n^2 \rangle.$$

Lineaarinen muuttujienvaihto on lineaarikuvaus

$$S^dV \to S^dV : P \mapsto P \circ L,$$

missä $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus.[8] Jos $\rho : G \to GL_n(\mathbb{R})$ on esitys, niin myös $g \mapsto (P \mapsto P \circ \rho(g))$ on G:n esitys. Tämä on erikoistapaus seuraavista yleisemmistä konstruktioista.

27.1. **Indusoidut esitykset.**

[9] Muistamme, että ryhmän G esitys vektoriavaruudessa V on ryhmähomomorfismi $G \to GL(V)$ ja että erityisesti Lien ryhmän esitykseltä lisäksi vaaditaan, että se on monistojen välisenä kuvauksena sileä. Tarkastelemme kohta esityksiä äärellisulotteisten vektoriavaruuksien tensorituloissa ja ulkoisissa potensseissa. Koska nekin ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia, niillä on luonnollinen moniston rakenne.

Definition 27.2. Olkoon ρ ja $\rho' : G \to GL(V)$ ryhmän G esityksiä äärellisulotteisissa avaruuksissa V ja W. Tällöin seuraavat ovat esityksiä

(1) $\rho \otimes \rho' : g \mapsto (\rho \otimes \rho')_g : V \otimes W \to V \otimes W : u \otimes w \mapsto \rho_g u \otimes \rho_g v$.
(2) $\rho \cdot \rho' : g \mapsto (\rho \cdot \rho')_g : S^2V \to S^2V : u \cdot w \mapsto \rho_g u \cdot \rho'_g v$.
(3) $\rho \wedge \rho' : g \mapsto (\rho \wedge \rho')_g : S^2V \to S^2V : u \wedge w \mapsto \rho_g u \wedge \rho'_g v$.

Tässä lineaarikuvaukset on määritelty antamalla kantavektorien kuvat.

[8] Oikeastaan polynomi ei ole funktio, mutta olkoon tässä tilapäisesti tulkittuna sellaiseksi.

[9] Onkohan tämä eri käsite kuin indusoitu esitys Serren kirjassa!?

Example 27.3. Tarkastellaan ryhmän $G = GL_2(\mathbb{R})$ tautologista eli alkuperäisen määritelmän mukaista toimintaa avaruudessa R^2. Tämä indusoi esityksen ulkoiseen tuloon $\lambda^2(\mathbb{R}^2)$, joka on yksiulotteinen avaruus, standardikantavektorina $e_1 \wedge e_2$. Lasketaan se eksplisiittiseti: Ryhmän $G = GL_2(\mathbb{R})$ alkio on matriisi $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Se kuvaa ulkoisen tulon strandardikantavektorin näin:

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 \mapsto ge_1 \wedge ge_2 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \\ &= (ae_1 + ce_2) \wedge (ce_1 \wedge de_2) \\ &= abe_1 \wedge e_1 + ade_1 \wedge e_2 + cbe_2 \wedge e_1 + cde_2 \wedge e_2 \\ &= (ad - bc)e_1 \wedge e_2 \\ &= \det g \, e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

Tulos on, että 2-ulotteisessa avaruudessa määritellyn lineaarikuvauksen, erityisesti esityksen, toinen ulkoinen potenssi on sen determinantilla kertominen 1-ulotteisesa avaruudessa.

Sama periaate yleistyy. Ryhmän $GL_n(\mathbb{R}^n)$ tautologinen toiminta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ indusoi yksiulotteiseen ulkoiseen potenssiin $\Lambda_n(\mathbb{R}^n)$ toiminnan, joka on alkuperäisen esitysmatriisin determinantilla kertominen.

Harjoitustehtäväksi jää selvittää, minkälaisen esityksen ryhmän $GL_n(\mathbb{R}^n)$ tautologinen toiminta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ indusoi useampiulotteiseen ulkoiseen potenssiin $\Lambda_m(\mathbb{R}^n)$, kun $1 < m < n$ Tässä esiintyy alideterminantteja.

Example 27.4. Ryhmän $G = GL_2(\mathbb{R})$ tautologinen toiminta avaruudessa R^2 indusoi esityksen neliulotteiseen tensorituloon $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Tehtävänä on hajottaa se redusoitumattomien esitysten suoraksi summaksi eli *redusoida tensoritulo.*

Ensimmäinen havainto on, että jotain on tehtävä, sillä tutkittava ryhmän $G = GL_2(\mathbb{R})$ toiminta, jossa

$$g : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 : g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

ei ole redusoitumaton, koska ainakin

$$W_s = \left\langle \{v \otimes w + w \otimes v \mid v, w \in \mathbb{R}^2\} \right\rangle$$

on aito aliesitys.Tämä antaa aiheen kokeilla, olisiko myös

$$W_\wedge = \left\langle \{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in \mathbb{R}^2\} \right\rangle$$

aito aliesitys, ja onhan se. Tutkitaan näiden aliesitysten redusoitumattomuutta alkeellisella menetelmällä, laskemalla esitys eksplisiittsesti näissä aliavaruuksissa. Aluksi lasketaan eksplisiittisesti ryhmän vaikutus $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to$:ssa.

Ryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ alkiot ovat kääntyviä 2×2-matriiseja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Avaruuden $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to$ virittäjävektorit ovat yksinkertaisia tensorituloja

$$v \otimes w = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}.$$

Erityisesti standardikantavektorit ovat näin merkiten

$$e_1 \otimes e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_1 \otimes e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 \otimes e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_2 \otimes e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Aliavaruuden $W_\wedge$ virittäjävektorit ovat muotoa

$$\begin{aligned} v \otimes w - w \otimes v &= \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

missä $\lambda = a_1b_2 - a_2b_1$. Toisin sanoen

$$W_\wedge = \lambda \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \left(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ryhmän toiminta tässä yksiulotteisessa avaruudessa määräyryy vaikutuksesta kantavektoriin ja on siis määritelmän mukaan seuraava:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) = (\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} e_1 \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} e_2 - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} e_2 \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} e_1 \\ &= \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & ad \\ cb & cd \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ba & cd \\ ad & cd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ad - bc \\ cb - ad & 0 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1). \end{aligned}$$

Näin on laskemalla todistettu, että tensorituloesityksen $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ aliesitys $W_\wedge$ on ryhmän alkion determinantilla kertominen yksiulotteisessa avaruudessa eli esityksenä isomorfinen esityksen $\Lambda^2\mathbb{R}^2$ kanssa.

Aliavaruuden W_s kannaksi voidaan valita

$$\{e_1 \otimes\ e_1,\ e_2 \otimes e_2,\ e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1\} \subset W_s,$$

sillä nämä kolme ovat lineaarisesti riippumattomia eikä avaruus W_s voi olla enempää kuin 3-ulotteinen, koska se on 4-ulotteisen avaruuden aito aliavaruus.

Ryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ toiminta symmetrisessä tulossa $S^2\mathbb{R}$ on mukava tulkita tämän luvun ensimmäisessää esimerkissä **??** esitetyllä tavalla eli lineaarisina muuttujanvaihtoina homogeenisten 2 asteen polynomien avaruudessa $\langle x^2, y^2, xy\rangle$.

On sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että kuvaus $W_s \to S^2\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e_1 \otimes\ e_1 &\mapsto x^2 \\ e_2 \otimes e_2 &\mapsto y^2 \\ e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 &\mapsto 2xy \end{aligned}$$

on esitysisomorfismi.

Osoitetaan vielä, että $S^2\mathbb{R}$ on redusoitumaton. On riittävää löytää vektori eli polynomi, jonka rata virittää koko kolmiulotteisen avaruuden $S^2\mathbb{R}$, mille riittää, että radassa on kolme lineaarisesti riippumatonta polynomia. Tällainen löytyy helposti kokeilemalla. Muistetaan, että ryhmän $G = GL_2(\mathbb{R})$ alkion $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vaikutus polynomien avaruudessa on

$$\begin{aligned} x &\mapsto ax + by \\ y &\mapsto cx + dy. \end{aligned}$$

Erityisestipolynomiavaruuden $S^2\mathbb{R}$ kantavektorit kuvautuvat siis näin:

$$\begin{aligned} x^2 &\mapsto (ax + by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \\ y^2 &\mapsto (cx + dy)^2 = c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2, \\ xy &\mapsto (ax + by)(cx + dy)^2 = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2, \end{aligned}$$

joten valitsemalla $a = b = c = -d = 1$ saadaan

$$xy \mapsto acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = x^2 - y^2,$$

mistä edelleen valitsemalla $a = 1, = b = c = d = 0$ saadaan

$$x^2 - y^2 \mapsto x^2$$

ja valitsemalla $a = b = c = 0, d = 1$ saadaan

$$x^2 - y^2 \mapsto -y^2.$$

Lineaarisesti riippumattomat xy, x^2 ja $-y^2$ ovat siis samalla radalla.

Näin on tensoritulo $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ redusoitu suoraksi summaksi, joka isomorfismin tarkkuudella on

$$\mathbb{R}^2 \otimes R^2 = \Lambda^2\mathbb{R} \oplus S^2\mathbb{R}.$$

Tämä tulos yleistyy korkeammillekin tensoripotensseille, mihin palaamme myöhemmin.

28. Lien algebrat - alustava esittely

28.1. **Abstrakti määritelmä.**

Definition 28.1. *Lien algebra* on vektoriavaruus V varustettuna alternoivalla bilineaarikuvauksella, *Lien sulkeilla*

$$V \times V \to V : (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

joka lisäksi toteuttaa *Jacobin identiteetin*: kaikilla $X, Y, Z \in V$:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Vektoriavaruuden kerroinkunta $\mathbb{F}$ voi periaatteessa olla mikä tahansa: seuraavassa se on yleensä $\mathbb{R}$, joskus C.

Lien algebrahomomorfismi on lineaarikuvaus $f : V \to V'$, missä V ja V' ovat Lien algebroita ja f säilyttää myös sulkeet, toisin sanoen $[f(X), f(Y)] = [X, Y]$ kaikille $X, Y \in V$. *Lien algebraisomorfismi* on lisäksi bijektio, jolloin sen käänteiskuvauskin on homomorfismi.

Lien alialgebra on sellainen Lien algebran vektorialiavaruus, joka sisältää akioidensa sulkeet ja on siis itsekin Lien algebra.

Remark 28.2. 1) Lien algebrat muodostavat kategorian, erityisesti homomorfismeista yhdistetty kuvaus on homomorfismi.

2) Lien algebra ei yleensä ole assosiatiivienen. Jacobin identiteetti korvaa osaltaan tämän "puutteen".

3) Lien algebrat kuuluvat Lien ryhmien ja niiden esitysten teoriaan sillä tavalla, että kuhunkin Lien ryhmään liittyy luonnollisella tavalla Lien algebra ja kaikki Lien algebrat ovat periaatteessa tällaisia. Sama koskee esityksiä.

Example 28.3. Alkeellisin esimerkki Lien algebrasta on *triviaali Lien algebra* eli mikä tahansa vektoriavaruus varustettuna nollatulolla: $[X, Y] = 0$

Example 28.4. Perusesimerkki Lien algebrasta on kaikkien $n \times n$-matriisien avaruus

$$gl_n = gl_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$$

varustettuna *standardisulkeilla*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

On hyvin helppoa tarkstaa, että standardisulkeet ovat alternoiva bilineaarikuvaus. Myös Jacobin identiteetti on ilmeinen:

$$\begin{aligned}
&[X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] + [Z, XY - YX] \\
&= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) \\
&\quad - (ZX - XZ)Y + Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\
&= X(YZ) - (XZ)Y - (YZ)X + (ZY)X + Y(ZX) - Y(XZ) \\
&\quad - (ZX)Y + (XZ)Y + Z(XY) - Z(YX) - (XY)Z + (YX)Z \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ \\
&\quad - ZXY + XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Osoittautuu pian, että äärellisulotteisten Lien ryhmien Lien algebrat ovat kaikki tämän Lien algebran alialgebroita.

Example 28.5. Edellisestä yleistämällä saadaan esimerkkinä Lien algebrasta mikä tahansa assosiatiivinen algebra $\mathcal{U}$ varustettuna *yleissulkeilla*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Tämän todistaminen Lien algebraksi on sama lasku kuin edellisessä esimerkissä.

Example 28.6. Seuraava esimerkki Lien algebrasta on esimerkki Lien ryhmän Lien algebrasta ja $gl_n(\mathbb{R})$:n Lien alialgebrasta:. Muistamme, että Lien ryhmän $SL_n(\mathbb{R})$ tangenttiavaruus neutraalialkion kohdalla on

$$T_e(SL_n(\mathbb{R})) = sl_n(\mathbb{R}) = \{X \in gl_n(\mathbb{R}) \mid Tr(x) = 0\}.$$

Tämä on Lien alialgebra, minkä tarkastamiseksi riittää todeta, että kyseessä on vektorialiavaruus ja $[X, Y] \in sl_n(\mathbb{R})$ aina, kun $X, Y \in sl_n(\mathbb{R})$, mikä tietenkin vaatiisi pienen laskun tarkastukseksi.

Example 28.7. *Heisenbergin Lien algebra* on kolmiulotteinen vektoriavaruus V, jossa kantavektorien Lien sulkeet ovat

$$\begin{aligned}[X,Y]&=Z\\ [Y,Z]&=0\\ [Z,X]&=0\end{aligned}$$

On aika helppoa huomata, että tämä on isomorfinen Lien algebran $sl_3(\mathbb{R})$ erään Lien alialgebran kanssa, nimitäin sen kanssa, joka koostuu aidoista yläkolmiomatriiseista. Isomorfismi on

$$\begin{aligned}X &\mapsto \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\ Y &\mapsto \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\\ Z &\mapsto \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

29. Lien ryhmän Lien algebra

29.1. **Katsaus periaatteisiin.** Lien ryhmän G Lien algebra on vektoriavaruutena sama kuin sileän moniston G tangenttiavaruus ryhmän G neutraalialkion $e \in G$ kohdalla. Lisäksi se on varustettu Lien sulkeilla, jotka määritellään ryhmän laskutoimituksen derivoituvuuden avulla.

Perusesimerkki Lien ryhmästä on kääntyvien $n\times n$-matriisien ryhmä $GL_n(\mathbb{R})$. Sen neutraalialkio on ykkösmatriisi I. Koska $GL_n(\mathbb{R})$ on kaikkien $n \times n$-matriisien avaruuden $M_{n\times n}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n\times n} \sim \mathbb{R}^{n^2}$ avoin osajoukko, niin sen tangenttiavaruus on kaikissa pisteissä, erityisesti kohdassa I sama kuin $\mathbb{R}^{n^2}$ eli $M_{n\times n}$. Tämän avaruuden olemme jo edellä esimerkissä **??** varustaneet Lien sulkeilla määrittelelmällä $[X,Y] = XY - YX$. Osoittautuu, että tämä on juuri oikea tapa tuoda Lien sulkeet Lien ryhmän $LG_n(\mathbb{R})$ tangenttiavaruuteen, ja siitä syystä merkitiiinkin jo edellä tätä Lien algebraa $gl_n(\mathbb{R})$. Seuraavassa selitetään, miten mielivaltaisen Lien ryhmän G tangenttiavaruus neutraalialkion kohdalla varustetaan Lien sulkeilla ja viime kädessä näytetään, että tämä yleinen menettely johtaa ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ tapauksessa sulkeisiin $[X,Y] = XY - YX$. Sama koskee Lien ryhmää $SL_n(\mathbb{R})$ ja sen Lien algebraa $gl_n(\mathbb{R})$. Yleinen konstruktio on kaksivaiheinen. Esitämme ensin määritelmän ja todistamme sitten kaikki sen asettamiseen tarvittavat apulauseet.

Definition 29.1. Vaihe 1. Olkoon γ n-ulotteisen Lien ryhmän G toiminta konjugointina ryhmässä G, ts.

$$\begin{aligned} \gamma_g : G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Kukin kuvaus γ_g on diffeomorfismi ja $\gamma_g(e) = e$, joten sen derivaatta kohdassa e on bijektiivinen lineaarikuvaus

$$Ad_g = d_e\gamma_g : T_eG \to T_eG.$$

Näin syntyy Lien ryhmän G esitys

$$\begin{aligned} Ad : G &\to GL(T_eG) \sim GL_n(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto (Ad_g : T_eG \to T_eG) \end{aligned}$$

Vaihe 2. Huomataan, että myös kuvaus Ad on sileä. Silläkin on siis derivaatta kohdassa $e \in G$. Määritellään ja merkitään

$$\begin{aligned} ad = d_e(Ad) : T_eG &\to T_I(GL(T_eG)) \\ X &\mapsto (ad_X : T_eG \to T_eG). \end{aligned}$$

Kuvauksen Ad derivaatta ad on siis lineaarikuvaus Lien ryhmän G tangenttiavaruudelta T_eG vektoriavaruuden $GL(T_eG)$ tangenttiavaruudelle kohdassa I eli avaruudelle

$$T_I(GL(T_eG)) \sim M_{n\times n} \sim \{\text{lineaarikuvaukset } T_eG \to T_eG\}.$$

Vaihe 3. Määritellään lopuksi, että *vektoriavaruuden T_eG Lien sulku* on

$$[X, Y] = ad_XY.$$

Näin määritelty kuvaus osoittautuu Lien sulkeeksi eli bilineaariseksi, alternoivaksi ja Jacobin identiteetin toteuttavaksi. Sanomme, että Lien ryhmän G tangenttiavaruus kohdassa e varustettuna tällä Lien sululla on *Lien ryhmän G Lien algebra.*

Remark 29.2. Todistetaan kaikki edellisen määritelmän yhteydessä esitetyt väitteet.

Vaihe 1. Konjugointi Lien ryhmässä G on yhdistetty kahdesta diffeomorfismista,

$$\gamma_g : h \mapsto gh \mapsto g^{-1},$$

siis itsekin diffeomorfismi, joten sen derivaatta

$$Ad_g = d_e\gamma_g : T_eG \to T_eG$$

kohdassa e on olemassa ja lineaarinen bijektio. Ketjusäännön mukaan $Ad_{gg'} = d_e\gamma_{gg'} = d_e(\gamma_g \circ \gamma_{g'}) = d_{\gamma'(e)}\gamma_g \circ d_e\gamma_{g'} = d_e\gamma_g \circ d_e\gamma_{g'} = Ad_g Ad_{g'}$, eli syntyy ryhmän G esitys

$$Ad : G \to GL(T_eG) \sim GL_n(\mathbb{R}).$$

Ollakseen Lien ryhmän G esitys kuvauksen Ad on lisäksi oltava sileä. Tätä voi olla vaikea huomata ilman koordinaatteja, mutta hetken mietittyään huomaa, että lokaaleissa koordinaateissa konjugointikuvauksen $G \times G \to G : (g,h) \mapsto ghg^{-1}$ kaikki komponentit ovat sileitä reaaliarvoisia funktioita. Sen h-derivaatan, eli kuvauksen Ad_g, matriisin elementit ovat näiden komponenttien osittaisderivaattoja, siis sileitä, joten kuvaus $g \mapsto \mathrm{Mat}\, Ad_g$ on sileä eli Ad on sileä.[10]

Vaihe 2. Ad_g:llä on siis derivaatta kohdassa $e \in G$. Sen derivaatta ad on siis ilman enempiä perusteluja lineaarikuvaus, ts.

$$T_eG \to T_I(GL(T_eG)) \sim M_{n\times n} \sim \{\text{lineaarikuvaukset } T_eG \to T_eG\}.$$

Vaihe 3. a) Bilineaarisuus: Koska ad_X on lineaarikuvaus $T_eG \to T_eG$, niin $Y \mapsto [X,Y] = ad_XY$ on tietenkin lineaarinen muuttujan Y suhteen. Lineaarisuus muuttujan X suhteen johtuu vastaavasti siitä, että kuvaus $ad : X \mapsto ad_X$ on kuvauksen Ad derivaatta jossain kohdassa ja siis lineaarikuvaus.

On vielä todistettava kaksi asiaa:

b) Alternoivuus ja

c) Jacobin identiteetti.

Ennen tätä urakkaa katsomme pari esimerkkiä:

Example 29.3. Lien ryhmä S^1 voidaan samaistaa kompleksitason $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ yksikköympyrään $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, jossa laskutoimituksena on kompleksilukujen tulo ja neutraalialkiona siis 1. Konjugointi alkiolla eli luvulla $g \in U(1)$ on kuvaus $z \mapsto gzg^{-1} = zgg^{-1} = g$, toisin sanoen jokainen γ_g on identtinen kuvaus. Identtisen kuvauksen derivaatta on luonnollisesti tangenttiavaruuden identtinen kuvaus, joten

$$Ad_g = d_1\gamma_g = Id_{T_1S^1}$$

[10]Voiko siistiä??

ja siis Ad on vakiokuvaus $S^1 \to GL(T_1S^1)$. Vakiokuvauksen derivaatta on nollakuvaus, joten $ad_X = 0$ kaikilla $X \in T_1S^1$ ja siis $[X,Y] = ad_XY = 0$ kaikilla X ja Y.

Sama päättely osoittaa, että jokaisen kommutatiivisen Lien ryhmän Lien algebra on triviaali.

Example 29.4. Tarkastetaan, että Lien ryhmän $G = GL_n(\mathbb{R})$ Lien algebra on aikaisemmin **??** määrittelemämme $gl_n(\mathbb{R})$. Tiedämme jo, että moniston $GL_n(\mathbb{R})$ tangenttiavaruus neutraalialkion I kohdalla on oikea joukko eli $T_I(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^{n\times n}$. Pitää siis vain näyttää, että konjugoinnin derivaattojen Ad ja ad avulla määrittelemällä saadaan tämän ryhmän tapauksessa standardisulkeet.

Konjugointi matriisilla g on kuvaus $\gamma_g : h \mapsto gh \mapsto ghg^{-1}$, joka on kahden lineaarikuvauksen yhdistettynä kuvauksena lineaarikuvaus tai tarkemmin sanoen oikeastaan lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ rajoittuma avoimeen osajoukkoon $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Sen derivaatta kohdassa I on siis sen jatko lineaarikuvaukseksi $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$:

$$Ad_gY = gYg^{-1}.$$

Kuvauksen

$$Ad : G \to GL(T(\mathbb{R}^{n^2})) : g \mapsto (Y \overset{Ad_g}{\mapsto} gYg^{-1})$$

derivointi g:n suhteen sujuu parhaiten, kun huomaa, että se on avoimeen joukkoon rajoitetun bilineaarikuvauksen

$$B : G \times G \to GL(T(\mathbb{R}^{n^2})) : (g, \tilde{g}) \mapsto (Y \overset{B_{g,\tilde{g}}}{\mapsto} gY\tilde{g})$$

ja matriisin kääntämisestä saadun kuvauksen $G \to G\times G : g \mapsto (g, g^{-1})$ yhdistetty kuvaus, joten voidaan käyttää ketjusääntöä, kunhan ensin derivoidaan osat.

Bilineaarikuvaukselle $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ on yleisesti voimassa derivoimiskaava[11]:

$$d_{(A,B)}B(X,Y) = B(A,Y) + B(X,B).$$

Erityisesti ykkösalkioiden kohdalla

$$d_{(I,I)}B(X,Y) = B(I,Y) + B(X,I).$$

[11] On Purmosen diff lask 1 monisteessa harjoitustehtävänä! Hyvä kaava. Tämän erikoistapauksena saadaan mm. tunnettu tulon derivoimiskaava.

Bilineaarikuvauksen tulon kaavasta voi johtaa, että matriisin kääntämisen $k : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ derivaatta on[12]

$$d_g k(X) = -g^{-1} X g^{-1}.$$

Erityisesti ykkösalkion $e = I \in G = GL_n(\mathbb{R})$ kohdalla

$$d_I k(X) = -X.$$

Yhdistämällä derivaatat saadaan yhdistetyn kuvauksen derivaatta:

$$\begin{aligned} ad : T_I G &\stackrel{d_I(Id,k)}{\to} T_I G \times T_I G \stackrel{d_{(I,I)}B}{\to} T_I(GL(T(\mathbb{R}^{n^2}))) \\ X &\stackrel{d_I(Id,k)}{\to} (X, -X) \stackrel{d_{(I,I)}B}{\to} B(I, -X) + B(X, I) \\ &= (Y \mapsto (IY(-X) + XYI)) \\ &= (Y \mapsto (XY - YX)), \end{aligned}$$

joka on standardisulkeet. □

Proposition 29.5. *Olkoon G Lien ryhmä. Lineaarikuvaus $ad : T_e G \to gl(T_e G)$ eli $\mathcal{G} \to gl(\mathcal{G})$ säilyttää Lien sulkeet, toisin sanoen kaikille $X, Y \in \mathcal{G}$:*

$$ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y],$$

missä vasemmalla on Lien ryhmän G Lien algebran $\mathcal{G}$ sulkeet ja oikealla Lien ryhmän $GL(T_e G)$ Lien algebran $gl(T_e G)$ Lien sulkeet, jotka edellisen esimerkin **??** *mukaan ovat lineaarikuvausten strandardisulkeet.*

Todistus. On todistettava, että kaikille $X, Y, Z \in \mathcal{G} = T_e G$ pätee

$$\begin{aligned} & ad_{[X,Y]}(Z) = [ad_X, ad_Y](Z) \\ \text{eli} \quad & ad_{[X,Y]}(Z) = (ad_X \circ ad_Y)(Z) - (ad_Y \circ ad_X)(Z). \end{aligned}$$

Todistus perustuu määritelmien ja edellisen esimerkin **??** lisäksi siihen, että Jacobin identiteetti on voimassa ryhmän G Lien algebralle. Emme vielä ole todistaneet tätä Jacobin identiteettiä, joten tämä todistus tulee viimeistellyksi vasta myöhemmin. Itse asiassa todistamme seuraavassa, että kaava $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$, on yhtäpitävä senkanssa,

[12]Oman laskelmani mukaan. Syytä tarkastaa!

että Jacobin identiteetti on voimassa ryhmän G Lien algebralle.

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$
$$[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]-[[X,Y],Z]=0$$
$$ad_X([Y,Z])-ad_Y([X,Z])-ad_{[X,Y]}(Z)=0$$
$$ad_X(ad_Y(Z))-ad_Y(ad_X(Z))-ad_{[X,Y]}(Z)=0$$
$$ad_X\circ ad_Y-ad_Y\circ ad_X=ad_{[X,Y]}$$

□

Tämä tulos yleistyy mille tahansa Lien ryhmien homomorfismille, erityisesti esitykselle:

Theorem 29.6. *Olkoon $f:G\to H$ Lien ryhmien homomorfismi. Derivaatta $df_e:T_eG\to gl(T_eG)$ eli $\mathcal{G}\to\mathcal{H}$ on* Lien algebrahomomorfismi *eli lineaarikuvaus, joka lisäksi säilyttää Lien sulkeet, toisin sanoen kaikille $X,Y\in\mathcal{G}$:*

$$df_e[X,Y]=[df_eX,df_eY],$$

missä vasemmalla on Lien ryhmän G Lien algebran $\mathcal{G}$ sulkeet ja oikealla Lien ryhmän H Lien algebran $\mathcal{H}$ Lien sulkeet.

Todistusluonnos:. On ilmeistä, että ryhmän konjugointi voidaan vaihtaa homomorfismin kanssa siinä mielessä, että diagramma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \gamma_g\downarrow & \cdot & \downarrow\gamma_{f(g)} \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

kommutoi eli $f(ghg^{-1})=f(g)f(h)f(g)^{-1}$ kaikilla $g,h\in H$. Derivoimalla kaikki kuvaukset saadaan ketjusäännön perusteella kommutatiivinen diagramma: kaikilla $g\in G$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{d_ef} & \mathcal{H} \\ Ad_g\downarrow & \cdot & \downarrow Ad_{f(g)} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{d_ef} & \mathcal{H} \end{array}$$

jolloin on saatu kuvaukset

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ Ad\downarrow & \cdot & \downarrow Ad \\ GL(\mathcal{G}) & & GL(\mathcal{H}) \end{array}$$

siten, että kaikilla $X\in Ad(G)\subset GL(\mathcal{G})$ on

$$df_e(Ad_g(X))=Ad_{f(g)}d_ef(X).$$

Derivoimalla tämä g:n suhteen saadaan

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{d_e f} & \mathcal{H} \\ ad \downarrow & & \downarrow ad \\ gl(\mathcal{G}) & & gl(\mathcal{H}), \end{array}$$

jossa jälleen ao. kuvajoukossa $ad(\mathcal{G}) \subset gl(\mathcal{G})$ pätee diagramman kommutatiivisuuskaava eli kaikilla $Y \in \mathcal{G}$

$$d_e f(ad_X)(Y) = ad_{d_e f(X)} d_e f(Y),$$

$$\text{eli} \quad d_e f([X, Y]) = [d_e f(X), d_e f(Y)].$$

Corollary 29.7. *,Lien ryhmän Lien algebra on Lien algebra, ts sulkeet toteuttavat myös alternoinitiehdon ja Jacobin identiteetin.*

Todistus. Todistus esitetään aivan kurssin lopussa. !!! □

30. Eksponenttikuvaus - alustava määritelmä

Definition 30.1. *Reaalisen Lien algebran esitys* on Lien algebrahomomorfismi Lien algebralle $GL_n(\mathbb{R})$. Vastaavasti määritellään kompleksinen ja yleisen Lien algebran esitys.

30.1. **Eksponenttikuvauksen idea.** Olemme edellä todenneet, että Lien ryhmään G liittyy Lien algebra $\mathcal{G}$, joka vektoriavaruutena on tangenttiavaruus T_eG. Edellisen lauseen mukaan tämä on luonnollinen yhteys siinä mielessä, että se säilyttää homomorfismitkin, erityisesti jokaisesta ryhmän G esityksestä $\rho : G \to GL_n(\mathbb{R})$ saadaan Lien algebraesitys $d_e\rho : \mathcal{G} \to gl_n(\mathbb{R})$. Seuravassa aletaan selvittää, missä mielessä tämä yhteys on käännettävissä — voidaanko joillain ehdoin Lien ryhmä rekonstruoida Lien algebrastaan ja voidaanko joillain ehdoin Lien ryhmän esitys rekonstruoida vastaavasta Lien algebran esityksestä. Eksponenttikuvaus on väline tähän tarkoitukseen.

Remark 30.2. Eksponenttikuvaus tulee olemaan sileä kuvaus

$$\exp : \mathcal{G} \to G,$$

jolla on mm. seuraavat ominaisuudet

(1) $0 \mapsto e \in G$
(2) $d_0 \exp = Id_{\mathcal{G}}$.

Nämä eivät aivan riitä määräämään eksponenttifunktiota yksikäsitteisesti, kuten voi huomata seuraavasta esimerkistä.

Example 30.3. Olkoon $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ kääntyvien reaalilukujen multiplikatiivinen ryhmä, jonka neutraalialkio on 1. Sen tangenttiavaruus neutraalialkion 1 kohdalla on $\mathcal{G} = T_1(\mathbb{R}^*) \sim \mathbb{R}$, jossa Lien algebran rakenne tulee triviaaleista sulkeista $[X, Y] = 0$, koska G on kommutatiivinen (**??**). Tässä tapauksessa tavallinen eksponenettifunktio toteuttaa yllä eksponenttikuvaukselle asettamamme ehdot, sillä $x \mapsto e^x$ on sileä kuvaus $\mathcal{G} \to G$ eli $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ja

(1) $0 \mapsto e^0 = 1 \in G$
(2) $d_0(x \mapsto e^x) = Id_{\mathbb{R}}$, sillä derivaattakuvauksen Jacobin matriisi on 1×1- matriisi $[\frac{\partial e^x}{\partial x}]_{x=0}$ ja $e^0 = 1$.

Tästä esimerkistä, josta yleinen eksponenttikuvaus on saanut nimensä, voi huomata, että määritelmän **??** ehdot eivät vielä riitä karakterisoimaan eksponenttikuvausta, sillä esimerkiksi mllä tahansa sellaisella funktiolla $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, joka yhtyy eksponenttifunktioon jossain pisteen 0 ympäristössä, on sama derivaatta $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=0}$ ja arvo $f(0) = 1$.

Ei ole kovinkaan yllättävää, että määritelmä **??** on vielä puutteellinen, eihän siinä lainkaan esiinny Lien algebran $\mathcal{G}$ sulkeita sen enempää kuin ryhmän G laskutoimitustakaan. Siksi myöskään tässä esimerkissä oleva piirre, että exp on sattuu olemaan ryhmähomomorfismi vektoriavaruuden $\mathcal{G}$ additiividelta ryhmältä ryhmälle G, ei arvattavastikaan yleisty täydentämään eksponenttifunktion määritelmää **??**. Näin asia onkin, tämän esimerkkikuvauksen homomorfisuus on sattuma, joka liittyy tutkittavan ryhmän yksiulotteisuuteen eikä ole tyypillinen edes seuraavassa määriteltävälle klassiselle eksponenttikuvaukselle.

Definition 30.4. *Klassinen eksponenttikuvaus* on kuvaus

$$\begin{aligned} \exp : M_{n\times n} &\to M_{n\times n} \\ A &\mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p = I + A + \frac{1}{2}AA + \frac{1}{6}AAA + \cdots \end{aligned}$$

Sarjan itseinen suppeneminen euklidisessa avaruudessa $M_{n\times n} = \mathbb{R}^{n\times n}$ on helppo todeta joko käyttämällä funktionaalianalyysistä tuttua matriisinormia $\|A\|_M = \{\sup \|Ax\| \mid \|x\| \le 1\}$ tai arvioimalla matriiseille avaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ euklidista normia käyttäen havaintoja

$$\|A\| \le n^2 \max_{i,j} |A_{ij}|$$

ja

$$[A^p]_{ij} \leq (n \cdot \max_{i,j} |A_{ij}|)^p.$$

Example 30.5. Olkoon $G = SO_2(\mathbb{R})$ tason $\mathbb{R}^2$ kiertojen ryhmä, jonka alkiot ovat matriisit

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Lokaaliksi parametrisoinniksi sileälle monistolle $SO_2(\mathbb{R})$ voidaan valita kuvaus $\varphi : \mathbb{R} \to M_{2\times 2} \sim \mathbb{R}^4 : \theta \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Erityisesti tässä $0 \overset{\varphi}{\mapsto} \mathbf{1}$, joten $SO_2(\mathbb{R})$:n tangenttiavaruus neutraalialkionsa $\mathbf{1}$ kohdalla saadaan derivoimalla lokaali parametrisointi kohdassa 0. Derivaatta on lineaarikuvaus

$$d_0\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 \sim M_{2\times 2} : \lambda \mapsto \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix},$$

joten tangenttiavaruus $so_2(\mathbb{R})$ on

$$T_0(SO_2(\mathbb{R})) = d_0\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \sim \mathbb{R}.$$

Koska $SO_2(\mathbb{R})$ on kommuttiivinen, Lien sulkeiksi tulee nolla. Klassinen eksponenttikuvaus $\exp : so_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}$ kuvaa matriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \in so_2(\mathbb{R})$ matriisiksi

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}^2 + \tfrac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}^3 + \tfrac{1}{4!} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}^4 + \dots \\
= {} & \mathbf{1} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + \tfrac{1}{3!}\lambda^3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 + \tfrac{1}{4!}\lambda^4 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 + \dots \\
= {} & \mathbf{1} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3!}\lambda^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{4!}\lambda^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots \\
= {} & \mathbf{1} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}\lambda^2 \mathbf{1} - \tfrac{1}{3!}\lambda^3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{4!}\lambda^4 \mathbf{1} + \dots \\
= {} & (1 - \frac{\lambda^3}{3!} + \dots)\mathbf{1} + (\lambda - \frac{\lambda^2}{2!} + \dots) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
= {} & \cos\lambda \mathbf{1} + \sin\lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Klassinen eksponenttikuvaus on siis ainakin tässä tapauksessa todella kuvaus ryhmän $SO_2(\mathbb{R})$ Lien algebralta $so_2(\mathbb{R})$ itselleen ryhmälle

$SO_2(\mathbb{R})$. Tietenkin se on myös sileä ja kuvaa nolla-alkion $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ykkösmatriisiksi. Lisäksi sen derivaatta nollassa on

$$d_0 \exp = \left(\begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \right) = Id_{so_2(\mathbb{R})},$$

joten se täyttää eksponenttikuvaukselle asettamamme ensimmäiset vaatimukset.

Kuten edellisessä esimerkissä on nytkin ryhmä yksiulotteinen, mistä aiheutuu, että eksponenttifunktio kuvaa yhteenlaskun tuloksi. Vastaavaa ei todellakaan tapahdu yleisessä tilanteessa!

Definition 30.6. (Ei varmaan kuulu ihan tähän paikkaan) Eksponenttikuvaukselle asetetaan määritelmässä **??** asetettujen ehtojen (1) ja (2) lisäksi vaatimus, että sen pitää olla seuraavassa mielessä luonnollinen:

(3) Jos $f : G \to H$ on Lien ryhmien homomorfismi, niin kaavio

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{f}{\to} & H \\ \exp \uparrow & \cdot & \uparrow \exp \\ \mathcal{G} & \stackrel{d_e f}{\to} & \mathcal{H} \end{array}$$

kommutoi.

31. Vektorikentät monistolla

31.1. **Tilannekatsaus / johdanto.** Jokainen Lien ryhmien homomorfismi $\rho : G \to H$, erityisesti esitys, määrittelee derivaattanaan Lien algebroiden välisen homomorfismin $d_0\rho : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Itse asiassa jokainen Lien algebroiden välinen homomorfismi, erityisesti jokainen Lien algebroiden esitys, on jonkin Lien ryhmähomomorfismin derivaatta.

Kun G on "konkreettinen" Lien ryhmä eli ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ aliryhmä, niin klassinen eksponenttikuvaus on kuvaus $\mathcal{G} \to G$, ja jos $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ on Lien algebroiden välinen homomorfismi, niin on olemassa Lien ryhmien homomorfismi $\rho : G \to H$ siten, että $T = d_0\rho$. Koska euklidinen avaruus $\mathcal{G}$ on yhtenäinen, on tietenkin myös sen jatkuva kuva $\exp(\mathcal{G}) \subset G$ yhtenäinen ja sisältyy siis siihen G:n yhtenäiseen komponenttiin, jossa neutraalialkio on. Jos lisäksi G on yhtenäinen ja yhdesti yhtenäinen, niin klassinen eksponenttikuvaus määrittelee 1-1-vastaavuuden Lien ryhmän G ja sen Lien algebran $\mathcal{G}$ esitysten välille.

Yhdesti yhtenäisiä Lien ryhmiä ovat mm. seuraavat:

(1) $\{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M$ on yläkolmiomatriisi ja sen kaikki diagonaalialkiot ovat ykkösiä.$\}$.
(2) edellisen suljetut Lien aliryhmät
(3) minkä tahansa Lien ryhmän yhtenäinen komponentti, joka sisältää neutraalialkion.
(4) minkä tahansa Lien ryhmän G *universaali peiteryhmä*. Tällä tarkoitetaan seuraavaa: Jokaisella monistolla M on olemassa yksikäsitteinen *universaali peiteravaruus* eli monisto P, jolta on sileä surjektio, *peitekuvaus* $\pi : P \to M$ siten, että jokaisella $x \in M$ on ympäristö U, jonka alkukuva $\pi_1(U)$ muodostuu kokoelmasta U:n kanssa diffeomorfisia erillisä osia:

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \qquad \pi \big|_{U_i} : U_i \to U \text{ on diffeomorfismi.}$$

Lien ryhmän universaali peiteavaruus voidaan varustaa Lien ryhmän rakenteella, jossa π on lisäksi homomorfismi[13].

On ilmeistä, että Lien ryhmällä ja sen universaalilla peiteryhmällä on sama Lien algebra.

Esimerkiksi$(\mathbb{R}, +)$ on tietenkin yhdesti yhtenäinen Lien ryhmä ja $\pi : \mathbb{R} \to U = SL_2(\mathbb{R}) : \lambda \mapsto \begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}$ on peitekuvaus ja homomorfismi. Kummallakin näistä ryhmistä on sama Lien algebra, ninittäin vektoriavaruus $\mathbb{R}$ varustettuna triviaaleilla eli nollasulkeilla.

Yhdesti yhtenäisiä Lien ryhmiä eivät ole esimerkiksi

(1) äärelliset ryhmät — paitsi tietenkin triviaali ryhmä,
(2) kiertoryhmä $U = SL_2(\mathbb{R})$,
(3) $SL_n(\mathbb{R})$,
(4) $SL_n(\mathbb{C})$,
(5) $O_n(\mathbb{R})$ ei ole yhtenäinen (toisessa komponentissa det on 1, toisessa -1.)
(6) Kun $n \geq 3$, niin myöskään yhtenäinen ryhmä $SO_n(\mathbb{R})$ ei ole yhdesti yhtenäinen. Sen peiteryhmä on nimeltään *spinryhmä* ja peitekuvaus on siinä mielessä melkein injektio, että jokaisen pisteen alkukuvassa on 2 pistettä; peiteryhmässä on *kaksi lehteä*.

[13]Näinhän?

Osoitamme seuraavassa, että yleisellä Lien ryhmällä on olemassa esitykset säilyttävä eksponenttikuvaus $\mathcal{G} \to G$. Tämän määrittelemiseen käytämme seuraavassa vektorikentän käsitettä.

31.2. **Vektorikentän klassinen määritelmä.** Tarkastelemme seuraavassa sileitä monistoja, joiden ei tarvitse olla Lien ryhmiä.

Definition 31.1. Olkoon $M \subset \mathbb{R}^n$ klassinen d-ulotteinen sileä monisto ja $x_0 = \psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_d) \in M$, missä $\psi : B \to X$ on lokaali parametrisointi; $B \subset \mathbb{R}^d$. Moniston M tangenttiavaruus pisteessä $x_0 = \psi(x)$ on kuva-avaruus $T_{x_0}(M) = d_x\psi(\mathbb{R}^d)$.

Moniston M *tangenttikimppu* on erillinen yhdiste sen kaikista tangenttiavaruuksista:

$$TM = \{(x, v) \bigm| x \in M,\, v \in T_x M\}.$$

Tangenttikimpulle määritellään *projektiokuvaus*

$$\pi : TM \to M : (x, v) \mapsto x,$$

jolloin kaikilla $x \in M$ on $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times T_x M \sim T_x M$. Näitä alkukuvia, siis yksittäisiä tangenttiavaruuksia, sanotaan myös tangenttikimpun TM *säikeiksi*.

Lisäksi tangenttikimppu varustetaan sileän $2d$-ulotteisen moniston rakenteella määrittelemällä kartoiksi ns. *lokaalit trivialisoinnit*:

$$\begin{aligned} \varphi_T : \pi^{-1}(U) &\to \varphi(U) \times \mathbb{R}^d \\ (x, v) &\mapsto (\varphi(x), d_x\varphi v), \end{aligned}$$

missä $\varphi : U \to B \subset \mathbb{R}^d$ on moniston M karttakuvaus.

KUVA TULEE AIKANAAN

Kuva 999: tangenttikimpun lokaali trivialisointi

Example 31.2. Ympyrän eli moniston $M = S_1$ tangenttikimppu on sylinteri $S_1 \times \mathbb{R}$ varustettuna tulomoniston rakenteella ja projektiokuvauksella $\pi : S_1 \times \mathbb{R} \to S_1 : (x, u) \mapsto x$. Tällaista tulon $M \times \mathbb{R}^d$ kanssa isomorfista tangenttikimppua sanotaan *triviaaliksi tangenttikimpuksi.* Huomaamme pian, että 2-ulotteisen pallon tangenttikimppu ei ole triviaali, mutta jokaisen Lien ryhmän tangenttikimppu on.

Definition 31.3. Moniston M *vektorikenttä* on sileä kuvaus $X : M \to TM$, jolla $\pi \circ X = Id_M$ eli $\forall x \in M : \ X(x) \in \{x\} \times T_x M$.

Example 31.4. Moniston M *vektorikenttä* on sileä kuvaus $X : M \to TM$, jolla $\pi \circ X = Id_M$ eli $\forall x \in M : \ X(x) \in \{x\} \times T_x M$.

Proposition 31.5. ***"Karvapallolause"***[14] *2-ulotteisella pallolla eli monistolla $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ jokaisella vektorikentällä on nollakohta.*

Todistus. Todistus vaatii hieman topologian osaamista ja sivuutetaan toistaiseksi □

Corollary 31.6. *Pallon S_2 tangenttikimpulla TS_2 ei ole* globaalia kehystä *eli sellaisia vektorikenttiä X_1, X_2, että $X_1(x), X_2(x)$ olisi tangenttiavaruuden $T_x S_2$ kanta jokaisessa pisteessä $x \in S_2$.*

Corollary 31.7. *Pallon S_2 tangenttikimpulla TS_2 ei ole* globaalia trivialisaatiota *eli diffeomorfismia $f : TS_2 \to S_2 \times \mathbb{R}^2$, jolla $\pi \circ f = f \circ \pi$.*

Todistus. Harjoitustehtäväksi jää todeta, että moniston tangenttikimpulla on globaali kehys tasan silloin, kun se on globaalisti trivialisoituva. □

On hyvä huomata, että esimerkiksi ympyrän S_1 tangenttikimppu eli syl1interi on gobaalisti trivialisoituva, mutta monistolla S_1 ei ole yhdestä lehdestä muodostuvaa karttaa. Globaali trivialisointi ei siis tarkoita samaa kuin yksilehtinen lokaali trivialisointi.

31.3. **Lien ryhmän vaseninvariantit vektorikentät.**

Definition 31.8. Lien ryhmän G vektorikenttä X on *vaseninvariantti*, jos kaikilla $g, h \in G$ pätee, että

$$d_x(m_g)X(h) = X(gh),$$

[14]Youtubessa on elokuvia, joissa palloa koetetaan kammata. Hauskoja!

missä $m : G \to G : h \mapsto gh$ on *kertominen vasemmalta* alkiolla g ja $d_x(m_g) : T_hG \to T_{gh}G$ on sen derivaatta.

Proposition 31.9. *Olkoon $v \in T_eG = \mathcal{G}$. Silloin*

$$X_v; g \mapsto (g, d_x(m_g)v)$$

on vektorikenttä, vieläpä vaseninvariantti, kun $m : G \to G : h \mapsto gh$ on kertominen vasemmalta alkiolla g ja $d_x(m_g) : T_hG \to T_{gh}G$ on sen derivaatta. Jos $v \neq 0$, niin vektorikenttä X_v on nollakohdaton, erityisesti siis ei nollakenttä, joten kuvaus $v \mapsto X_v$ on lineaarinen injektio, itse asiassa bijektio $T_eG \to \{G$:n vaseninvariantit vektorikentät$\}$.

Todistus. Kuvaus X_v on vektorikenttä, sillä se on sileiden kuvausten yhdistettynä kuvauksena sileä kuvaus $X : M \to TM$ ja tietenkin $X(x) \in \{x\} \times T_xM$ kaikilla $x \in M$. Vaseninvariansssi johtuu suoraan ketjusäännöstä:

$$\begin{array}{ccccccc} m_{gh}: & G & \xrightarrow{m_h} & G & \xrightarrow{m_g} & G \\ & | & & | & & | \\ d_em_{gh}: & T_eG & \xrightarrow{d_em_h} & T_hG & \xrightarrow{d_em_g} & T_{gh}G \end{array}$$

Bijektiivisyys ja lineaarisuus on helppo tarkastaa. □

Lauseen **??** merkitys on siinä, että se antaa mahdollisuuden samaistaa neutraalialkion tangenttiavaruudessa olevan yksittäisen tangenttivektorin kokonaiseen vaseninvarianttiin vektorikenttään. Tämä tapahtuu kuvauksella

$$x \mapsto (g \mapsto d_em_gx).$$

Vektorikentille on luonnollista määritellä yhteenlasku ja luvulla kertominen säikeittäin eli asettamalla $(\alpha X + \beta Y)(x) = (x, \alpha v + \beta w)$, jos $X(x) = (x, v)$ ja $Y(x) = (x, w)$. Näin menetellen moniston M vektorikenttien joukko on vektoriavaruus ja erityisesti Lien ryhmän vaseninvarianttien vektorikenttien joukko on tangenttiavaruuden T_eG (ja jokaisen muunkin taqngenttiavaruuden) kanssa isomorfinen vektoriavaruus. Sille voidaan siirtää T_eG:n kanta, joten Lien ryhmällä on globaali kehys. Luonnollisesti sille voidaan myös siirtää T_e:n sulkeet, jolloin Lien ryhmän vaseninvarianttien vektorikenttien joukko on tulkittu sen Lien algebraksi. Osoittautuu, että tämä tulkinta on siitä hyvä, että myös vektorikentillä on eräänlaiset Lien sulkeet ja Lien ryhmien tapauksessa nämä ovat samat kuin tangenttiavaruudessa määrittelemämme.

Huomattakoon vielä, että kuvaus

$$g \mapsto (X \mapsto d_e m_g X)$$

on G:n esitys omien vaseninvarienttien vektorikenttiensä avaruudessa, jonka samaistimme Lien algebraan $\mathcal{G}$.

Remark 31.10. Edellinen yleistyy: Jos Lien ryhmä G toimii diffeomorfismein jollain monistolla M, niin G toimii lineaarisesti eli G:llä on esitys M:n kaikkien vektorikenttien avaruudessa VK_M *siirtämällä vasemmalta säikeittäin* eli näin:

Olkoon $X : M \to TM : x \mapsto (x, X(x))$ vektorikenttä ja olkoon $g \in G$. Vektorikenttä gX on kuvaus

$$y \mapsto (y, d_x m_g X(x)),$$

missä g:llä on merkitty alkion $g \in G$ toimintaa M:ssä ja $x = g^{-1}y$.

TASTA ALKAA UUSI

31.4. **Eksponenttikuvauksen yleinen määritelmä.** Tavoitteena on määritellä sellainen kuvaus exp yleisen Lien ryhmän Lien algebralta $\mathcal{G}$ Lien ryhmälle G, että

(1) $0 \mapsto e$
(2) $d_0 \exp = Id_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to \mathcal{G} = T_0(\mathcal{G})$

(3) kaikilla $X \in \mathcal{G}$ rajoittuma $\exp\big|_{\mathbb{R}X}$ on ryhmähomomorfismi $\mathbb{R}X \sim \mathbb{R} \to G$, toisin sanoen kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathcal{G}$

$$\exp((\lambda + \mu)X) = \exp(\lambda X) \cdot \exp(\mu X).$$

Ehto (3) on tapana ilmaista sanomalla, että rajoittuma $\exp\big|_{\mathbb{R}X}$ on G:n *yksiparametrinen aliryhmä*.

Proposition 31.11. *On olemassa tasan yksi ehdot (1)-(3) täyttävä kuvaus.*

Todistus. Konstuktio on kaksivaiheinen:

(Vaihe 1) Tulkitaan Lien algebran $\mathcal{G}$ alkio X vaseninvariantiksi vektorikentäksi X monistolla G. Tämä on yllä tehty.

(Vaihe 2) Otetaan differentiaaliyhtälöiden teoriasta tieto, että nollakohdattomalla vektorikentällä X on "virtaus-" eli "integraaliikäyrä" pisteen $p \in G$ ympäristössä ja määritellään $\exp X$ lähtemällä neutraalialkiosta ja "seuraamalla virtausta aika 1". Tällä tarkoitetaan seuraavaa konstruktiota:

Sileän moniston M vektorikentän X *virtaus-* eli *integraalikäyrä* pisteen $p \in M$ ympäristössä $U \subset M$ on sileä käyrä $\gamma_X :]-\epsilon, \epsilon[\to M$, jolla $0 \mapsto p$ ja

$$d_t\gamma_X : \mathbb{R} \to T_p(M) : s \mapsto (\gamma(t), sX(\gamma(t)),$$

erityisesti siis

$$"1 \overset{d_t\gamma}{\mapsto} X \in T_{\gamma(t)}".$$

Tällainen virtauskäyrä on aina olemassa ja yksikäsitteinen riittävän pienellä välillä $]-\epsilon, \epsilon[$, mutta yleensä ei millä tahansa välillä saati koko $\mathbb{R}$:ssä.[15] Lien ryhmän vaseninvariantin vektorikentän virtauskäyrä voidaan kuitenkin jatkaa niin, että se tulee määritellyksi kaikille reaaliluvuille ja vieläpä on ryhmähomomorfismi $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$. Tämä tapahtuu "siirtämällä sitä pätkä kerrallaan". Ennenkuin teemme tämän tarkasti tarkastelemme, miten virtauksen γ_X avulla määritellään eksponenttikuvaus. Se tapahtuu näin:

$$\exp : \mathcal{G} \to G : X \mapsto \gamma_X(1).$$

[15] Vastaesimerkin antaa vakiovektorikenttä avoimessa pallossa.

Tämä kuvaus toteuttaa tietenkin eksponenttikuvauksen määritttelevät ehdot (1) ... (3) ja on virtauksen yksikäsitteisyyden nojalla ainoa kuvaus, joka tekee niin. Konstruktiosta on jäljellä enää edellä sivuuttamamme kohta, eli virtauksen jatkaminen väliltä $]-\epsilon, \epsilon[$ kaikkien reaalilukujen joukkoon. Tehdään se:

Virtauksen yksikäsitteisyydestä seuraa, että $\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s) \cdot \gamma_X(t)$ pätee ainakin, kun $|t| \leq \frac{\epsilon}{2}$ ja $|s| \leq \frac{\epsilon}{2}$, sillä kiinteällä s molemmat puolet ovat muuttujan t funktioina saman vektorikentän X virtauksia saman pisteen $\gamma_X(s)$ ympäristössä. Tarkastetaanpa tämä:

Merkitään tutkittavia käyriä hieman lyhemmin $\gamma = \gamma_X$, $\alpha(t) = \gamma_X(s+t)$ ja $\beta(t) = \gamma_X(s) \cdot \gamma_X(t)$. Selvästi molemmilla on sama alkuarvo $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma_X(s)$. Lisäksi kumpikin on vektorikentän X virtauskäyrä, sillä virtauskäyrän määritelmästä

$$d_t\gamma : \mathbb{R} \to T_{\gamma(t)}(M) : r \mapsto rX(\gamma(t))$$

eli samasta lausuttuna pelkän kantavektorin kuvan avulla:

$$d_t\gamma : \mathbb{R} \to T_{\gamma(t)}(M) : 1 \mapsto X(\gamma(t))$$

saadaan käyrälle α:

$$\begin{aligned} d_t\alpha : &\mathbb{R} \overset{Id=d_t(r \mapsto s+r)}{\longrightarrow} \mathbb{R} \overset{d_{s+t}(\gamma)}{\longrightarrow} T_{\alpha(t)}G \\ &1 \mapsto d_{t+s}(\gamma) = X(\gamma(s+t)) = X(\alpha(t)). \end{aligned}$$

ja käyrälle $\beta = m_{\gamma(s)} \circ \gamma$:

$$\begin{aligned} d_t\beta : &\mathbb{R} \overset{d_t\gamma}{\longrightarrow} T_{\gamma(t)}(G) \overset{d_{\gamma(t)}(m_{\gamma(s)})}{\longrightarrow} T_{\beta(t)}(G) \\ &1 \mapsto X(\gamma(t)) \mapsto d_{\gamma(t)}(m_{\gamma(s)})(X(\gamma(t))) \overset{vas.inv!}{=} X(\gamma(s) \cdot \gamma(t)) = X(\beta(t)). \end{aligned}$$

Määritellään kaikilla $r \in]-2\epsilon, 2\epsilon[$

$$\gamma_X(r) = \gamma_X(\tfrac{r}{2} + \tfrac{r}{2}) = \gamma_X(\tfrac{r}{2}) \cdot \gamma_X(\tfrac{r}{2}).$$

Olemme edellä varmistaneet, että tämä määritelmä ei ole ristiriidassa aikaisemman kanssa. Lisäksi on ilmeistä (HT pitäisi olla) , että näin jatkettunakin käyrä γ_X on vektorikentän X virtauskäyrä samalla alkuarvolla. Menettely voidaan toistaa ja näin jatkaa γ_X virtauskäyräksi kaikille väleille $]-2^n\epsilon, 2^n\epsilon[$ eli koko joukkoon $\mathbb{R}$.

$\square$