JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

ESITYSTEORIA **Harjoitus 8 / 2009**
D 355 tiistai 27.10 klo. 8-10.

1. Sivulla 17 sanotaan, että on saatu mitä kätevin redusoitumattomuuskriteeri. Mikä? Sovella sitä yhteen tai useampaan redusoitumattomaan tai redusoituvaan esitykseen ja kokeile, miten se toimii.

2. Serren tehtävä 2.6 (c) sivulla 17 (oli, mutta jäi katsomatta viime kerralla.)

3. Serren tehtävä 2.7 sivulla 18

4. Yritä laatia karakteeritaulu eli luettelo kaikista redusoitumattomista karakteereista neljän alkion permutaatioryhmälle eli symmetriselle ryhmälle S_4. Kaikki keinot luvallisia! En ole itse kokeillut. Jos on vaikeaa, vaihda ryhmää. (Vrt. Serre sivu 20)

5. Viime kerran tehtävässä 1 annettu esitys osoitautui redusoituvaksi. Osaatko redusoida?

6. Viime kerran tehtävää 5 eli Serren tehävää 2.8) (a) sivulla 22 ei saatu ihan ratkaistua. Onnistuisiko nyt?

Seuraavat tehtävät ovat sivulta 22. Luennoimaton osuus tekstiä on aika helppotajuinen. Sen pääkohdat ovat:

Lause 5.6. *(Sivu 19) Ryhmän G redusoitumattomien esitysten karakteerit muodostavat kaikkien luokkafunktioiden avaruuden $H = \mathbb{C}^{\{G:nkonjugaattiluokat\}}$ ortonormaalin kannan.*

Lause 5.7. *(seuraus) Ryhmän G redusoitumattomien esitysten lukumäärä on sama kuin luokkafunktioiden avaruuden $H = \mathbb{C}^{\{G:nkonjugaattiluokat\}}$ dimensio eli G:n konjugaattiluokkien lukumäärä.*

Prop.7 (Sivu 20) Olkoon $c(s)$ alkion $s \in G$ konjugaattiluokan suuruus eli alkioiden lukumäärä.

(a) $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \overline{\chi_i(s)} \chi_i(s) = g/c(s)$.

(a') $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t) = g/c(s)$, jos s ja t ovat samassa konjugaattiluokassa.

(b) $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t) = 0$, jos s ja t ovat eri konjugaattiluokissa.

Kanoninen hajoitelma. (Sivut 21, 22, en toista tässä.)

7. Serren tehtävä 2.8) (a) sivulla 22

8. Serren tehtävä 2.8) (b) sivulla 22

9. Serren tehtävä 2.8) (c) sivulla 22

KÄÄNNÄ

Täytteeksi lisä- ja kertaustehtäväiä kurssin alkupuolelta, jos ja kun ehditään katsoa. Dummit & Foote

10. Osoita, että jos $S \subset G$ ja $g \in G$, niin

$$gN_G(S)g^{-1} = N_G(gSg^{-1})$$

ja

$$gC_G(S)g^{-1} = C_G(gSg^{-1}).$$

11. Olkoon G äärellisessä joukossa A transitiivinen permutaatioryhmä. Määritellään, että *lohko* [block] on epätyhjä osajoukko $B \subset A$, jolle kaikille $\sigma \in G$ pätee joko $\sigma(B) = B$ tai $\sigma(B) \cap B = \emptyset$.

a) Osoita, että jos a kuuluu lohkoon B, niin joukko $G_B = \{\sigma \in G \mid \sigma(B) = B\}$ on G:n aliryhmä ja $a \in G_B$.

b) Osoita, että jos B on lohko, niin kaikki *erilliset* kuvajoukot $\sigma_1(B)$, $\sigma_2(B)$, ... ja $\sigma_n(B)$ muodostavat A:n osituksen eli niiden yhdiste on koko A.

c) Transitiivista ryhmää, joka toimii joukossa A, sanotaan *primitiiviseksi*, jos sen ainoat lohkot ovat triviaalit lohkot eli koko A ja sen yksialkioiset osajoukot. Osoita, että S_4 on primitiivinen joukossa $A = \{1, 2, 3, 4\}$. (Vertaa D_8:n toimintaan neliön kärjissä, jos ehdit.)

d) (bonustehtävä?) Osoita, että transitiivinen ryhmä on primitiivinen joukossa A, jos ja vain jos kaikille $a \in A$ ainoat aliryhmät, jotka sisältävät stabilisaattorin G_a ovat koko G ja G_a, ts. jos jokainen G_a on G:n *maksimaalinen* (aito) aliryhmä.

12. Transitiivista ryhmää, joka toimii joukossa A, sanotaan {kahdesti transitiiviseksi}, jos edes yhdellä (ja silloin kaikilla) $a \in A$ aliryhmä G_a toimii transitiivisesti joukossa $A \setminus \{a\}$.

a) Osoita, että S_n on kahdesti transitiivinen joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Osoita, että jokainen kahdesti transitiivinen ryhmä on primitiivinen. (joten D_8 ei ole kahdesti transitiivinen toimiessaan neliön kärjissä.]