

**ESITYSTEORIA****Harjoitus 7 / 2009****D 355 tiistai 27.10 klo. 8-10.**

Korjaus demoissa 6 esittämäni epäilyyn: Serren demo 2.3 antaa todella karakterin $\chi' = \chi^*$ eli $\bar{\chi}$, sillä tässä $\rho'_s(x') = \rho_{s-1} \circ x'$, joten V' :n standardikannassa $\{e'_1, \dots, e'_n\}$, jolle $\langle e_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$, on $\text{Mat } \rho'_s = \text{Mat } \rho_{s-1}$ ja siis $\chi'_s = \text{Tr Mat } \rho'_s = \text{Tr Mat } \rho_{s-1} = \bar{\chi}$. (Vrt prop 1 sivu 10).

1. Tarkastele 4-alkioisen syklisen ryhmän esitystä \mathbb{C}^2 :ssa. (Reaaliset kiertomatriisit 0, 90, 180 ja 270 astetta.) Totea tässä erikoistapauksessa suoraan, että Serren 2.2. Cor 3 pätee. (Jos et pidä tästä esimerkistä, tutki joku muu esitys.)
2. Ovatko edellisen tehtävän matriisit unitaarisia? Jos ovat, totea tässä erikoistapauksessa ed. lauseen huomautuksen (2) mukaiset ortogonaalisuusehdot. Jos eivät, korvaa ne unitaarisilla matriiseilla.
3. Serren tehtävä 2.5 sivulla 17
4. Serren tehtävä 2.6 (a) sivulla 17
5. Serren tehtävä 2.6 (b) sivulla 17
6. Serren tehtävä 2.6 (c) sivulla 17
7. Serren tehtävä 2.4 sivulla 12. (laske loppuun; karakteri taitaa olla kirjassa sittenkin oikein!)

Jokainen karakteri on luokkafunktio. Viime kerran tehtävä 5 a) sanoi, että myös jokainen homomorfismi $G \rightarrow \mathbb{C}$ on luokkafunktio. Selaa Serren kirjaa tarvittaessa eteenpäin ja etsi vastauksia seuraaviin: (Kysymykset eivät välttämättä ole ”parhaassa järjestyksessä”, toiset helppoja, toiset hankalampia.) Olkoon G ryhmä.

8. (a) Onko jokainen luokkafunktio $G \rightarrow \mathbb{C}$ jonkin G :n redusoitumattoman esityksen karakteri?
(b) Onko jokainen luokkafunktio $G \rightarrow \mathbb{C}$ jonkin G :n esityksen karakteri?
9. Onko jokainen homomorfismi $G \rightarrow \mathbb{C}$ jonkin G :n esityksen karakteri?
10. (a) Onko mikään G :n esityksen karakteri homomorfismi $G \rightarrow \mathbb{C}$?
(b) Onko jokainen G :n esityksen karakteri homomorfismi $G \rightarrow \mathbb{C}$?
11. (a) Onko jokainen luokkafunktio $G \rightarrow \mathbb{C}$ joidenkin G :n redusoitumattomien esitysten karakterien lineaarikombinaatio?
(b) Onko jokainen homomorfismi $G \rightarrow \mathbb{C}$ joidenkin G :n redusoitumattomien esitysten karakterien lineaarikombinaatio?