JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

ESITYSTEORIA **Harjoitus 11 / 2009**
D 355 maanantai 14.8.12 klo. 8-11.

Koska ensi tiistaina on monella este (kokeita), päätettiin rästiin jäänyt luento pitää **maanantaina kello 12-14. Demot 11 pidetään samana aamuna klo 9-11.** Koska tiistai ei tule kysymykseen, pidetään viimeine opetustilaisuus –**demot 12** – **keskiviikkona 16.12. klo 9-11.**

Tentti pidettäisin sitten keskiviikkona 17.12 ja uusinta kevätlukukauden alussa. Suosittelen tuloa jo ensimmäiseen tenttiin, niin pääsee sitten vapaana Joulun viettoon.

Indusoiduista esityksistä (Ks liite)

1. Todista, että esimerkki 1 sivulla 17 on oikein.

2. Todista, että esimerkki 2 sivulla 17 on oikein.

3. Todista, että esimerkki 3 sivulla 17 on oikein.

4. Todista, että esimerkki 4 sivulla 17 on oikein.

5. Todista, että esimerkki 5 sivulla 17 on oikein.

6. Ratkaise yksi Serren tehtävistä 3.4 – 3.6 sivulla 31. (En heti keksinyt ratkaisua ensimmäiseen enkä ole ehtinyt miettiä muita. Mutta idean kun keksii, niin ei liene vaikea. Kirjallisuudesta tai verkosta on apua?)

Abelin ryhmistä

7. Ratkaise yksi Serren tehtävistä 3.1 – 3.3 sivulla 26.

Rästissä

8. Onko olemassa (aliavaruuksien inkluusion mielessä, tottakai) suppein annetun vektorin sisältävä redusoitumaton esitys?

En ole vielä koettanut miettiä tätä, mutta sen muistamme, että jos W on redusoitumaton (tulkitse merkintä oikein!), V invariantti ja $W \cap V \neq \emptyset$. , niin $W \subset V$.

Seuraavat kysymykset asetin jo kierroksella 9, mutta vasta 8.12 ehdittiin sanoa jotain.

Serren tehtävä 2.9) sivulla 24: Käsiteltiin 8.12.: Olkoon $\rho : G \to GL(V)$ redusoituva isomorfisten redusoitumattomien esitysten $\rho_W : G \to GL(W)$ suoraksi summaksi: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$, missä siis kaikki rajoittumat $\rho_i : G \to GL(W_i)$ ovat isomorfisia keskenään ja $\rho_W : G \to GL(W)$:n kanssa. Tämä tarkoittaa mm sitä, että kaikilla $s \in G$, $i = 1 \dots m$ ja $x \in W_i$ pätee $\rho_i sx = \rho x \in W_i \subset V$, missä on lopuksi samaistettu $W_i = 0 \oplus \cdots \oplus W_i \oplus \cdots \oplus 0 \subset W_1 \oplus \cdots \oplus W_m = V$.

Prop 8 mukaan kirjassa määritellyillä kuvauksilla $p_{\alpha\beta} : V \to V$ $(\alpha, \beta = 1 \dots n = \dim W = \dim V/m)$ on mm seuraavat ominaisuudet:

(1) On olemassa keskenään isomorfiset aliavaruudet $U_\alpha \subset V$ siten, että $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ ja $p_{\alpha\beta}$ kuvaa U_β:n isomorfisesti U_α:lle ja muut U_γ:t nollaksi.

(2) Kuvaukset $p_{\alpha\beta} : U_\beta \to U\alpha$ toteuttavat : $p_{\gamma\alpha} \circ p_{\alpha\beta} = p_{\gamma\beta}$.

(3) Kun $x \in U_1$, niin $(p_{11}x, p_{21}x, \ldots, p_{n1}x)$ on kanta redusoitumattomalle W:n kanssa isomorfiselle esitykselle $< p_{11}x, p_{21}x, \ldots, p_{n1}x >$. (Tulkitse taas oikein!) Merkitään sitä $W(x)$.

Erityisesti, jos $(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)})$ on U_1:n kanta (mv!), niin sen kuvina saadaan kannat $< p_{\alpha 1}x_1^{(1)}, \ldots, p_{\alpha 1}x_1^{(m)} > \subset W(x_1^{(i)})$, joissa kaikissa $(i = 1 \ldots n)$ esityksellä ρ on sama matriisi (kuin se, jonka avulla kuvaukset $p_{\alpha\beta}$ on määritelty kirjassa).

Tässä mielessä W_i:ksi voi ajatella valitun (tai nyt valita) juuri avaruuden $W(x_1^{(i)})$. Näin merkitsemmekin tästä pitäen. Koska syntyneet redusoitumattomat esitykset ovat isomorfisia (W:n kanssa) voimme sotkuitta **merkitä niiden kantavekoreita samoilla symboleilla** $e_\alpha = p_{\alpha 1}x_1^{(i)}$ **kaikissa** W_i**.**

(4) $U_\alpha \cap W(x_1^{(i)}) =< p_{\alpha 1}x_1^{(i)} >$, siis yksiulotteinen. Vektorit $p_{\alpha 1}x_1^{(i)}$ muodostavat koko nm-ulotteisen avaruuden V kannan $(i = 1 \ldots m$ ja $\alpha = 1 \ldots n)$.

(5) Kun redusoitumattonam esityksen matriisi $(r_\alpha \beta)(s)$ on annettu kaikilla $s \in G$, niin U_1:n kannan $(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)})$ valinta siis ratkaisee, miten V (oikeastaan ρ) on jaettu W:n (oikeastaan ρ_W:n) kanssa isomorfisiksi osiksi.

Tehtävä: Määritellään $H = \{h : W \to V \mid h \circ \rho_s = \rho_s \circ h \quad \forall s \in G\}$. Olkoon $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$. Osoita, että kuvaus $\Phi_\alpha : H \to V : h \mapsto h(e_\alpha)$ on lineaari-isomorfismi. Vihje : Valitse H:lle edullinen kanta (demo 9!) ja katso sen kuvaa.

9. Serren tehtävä 2.10) sivulla 24 (jatkoa, perustapaus) Olkoon $x \in V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ ja olkoon $V(x)$ suppein annetun vektorin x sisältävä esitys.

Valitaan kaikilla $\alpha = 1, \ldots, m$:

$$y_1^\alpha = p_{1\alpha}x, \text{ jolloin } \quad y_1^\alpha \in U_1.$$

Osoita, että

$$V(x) = \bigoplus_{\alpha=1}^n W(y_1^\alpha).$$

10. (jatkoa) Osoita, että $V(x)$ on suora summa enintään $n = \dim V / \dim W$ kappaleesta W:n kopioita.

11. (jatkoa) Miksi ”enintään”?

12. Kierroksen 8 tehtävä 3) jäi sekin edelleen vielä hieman vastausta vaille.

1. Indusoiduista esityksistä (Liite)

Muista aluksi, että aliryhmän $H \subset G$ *vasemmat sivuluokat* ovat (keskenään yhtä mahtavat erilliset) joukot sH, missä $s \in G$. Erityisesti $H = 1H$ on vasen sivuluokka. Kaikkien vas. sivuluokkien yhdiste on G, joten ne muodostavat G:n osituksen ja siis $\#G = \#H \times (G : H)$, missä on merkitty $(G : H) = \#\{\text{sivuluokat}\}$. Lukumäärää $(G : H)$ sanotaaan H:n *indeksiksi* (G:ssä. Vasempien sivuluokkien joukkoa merkitään seuraavassa G/H, ja sehän on tunnetusti (tekijä)ryhmä, jos H sattuu olemaan normaali aliryhmä.

Ositusominaisuus sanoo, että $g \in g'H \iff g' \in gH$, sillä tietenkin $g \in gH$.

Seuraavassa käytetään (tilapäistä) merkintää $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ joukosta, jossa on tasan yksi r_i kustakin (eri) sivuluokasta. Tällaista joukkoa R voi sanoa vaikka sivuluokkien edustajistoksi. Selvästi $G = RH$ siten, että kullakin $s \in G$ esitys $s = rh$, $r \in R, h \in H$ on 1-käsiteinen.

Määritelmä. Olkoon
$\rho : G \to GL(V)$ esitys ja
$\rho_H = \rho \big|_H$ sen rajoittuma aliryhmään $H \subset G$.

Olkoon edelleen $W \subset V$ ρ_H-invariantti eli aliesitys. Yleensä tällöin tietenkin $sW \neq W$, kun $s \in G \setminus H$. Itse asiassa $sW = s'W$ tasan silloin, kun $s' \in sW$, sillä $W = s'W$ tasan silloin, kun $s' \in W$. Tämä antaa aiheen seuraavaan:

Merkinnät: Sekä W_s etä W_σ tarkoittavat aliavaruutta $\rho_s W$, kun on merkitty $\sigma = sH$. Kuvaus $\sigma \mapsto W_\sigma$ on injektio, ts. kuhunkin sivuluokkaan liittyy eri aliavaruus.

Aliavaruudet W_σ eivät tietenkään yleensä yhdessä viritä koko V:tä eivätkä ole lineaarisesti riippumattomia. Jos ne kuitenkin yhdessä virittävät koko V:n ja lisäksi todella ovat lineaarisesti riippumattomia, eli jos sattuu olemaan

$$V = \sum_{\sigma \in \frac{G}{H}} W_\sigma = \bigoplus_{\sigma \in \frac{G}{H}} W_\sigma,$$

niin silloin alkuperäinen esitys on *rajoittumansa aliesityksen* $\rho_H : H \to GL(W)$ *indusoima.*

Huom: Vaikka $\sum_{\sigma \in \frac{G}{H}} W_\sigma$ ei olisikaan koko V, niin se on joka tapauksessa G-invariantti eli aliesitys. Jos erityisesti ρ on redusoitumaton, niin siis $\sum_{\sigma \in \frac{G}{H}} W_\sigma$ on sittenkin koko V (tai joskus $\{0\}$.)

Määritelmä on sikäli järkevä, että tässä tilanteessa:
$\rho_s x = \rho_{Hs} x$, kun $s \in H$ ja $x \in W$.
$\rho_g x = \rho_{rs} x = \rho_r(\rho_s x)$, kun $g = rs$, ($r \in R$ ja $s \in H$) ja $x \in W$.
$\rho_s : W_t \to W_{st}$ on tietenkin lineaari-isomorfismi.

Huom: Seuraavat ovat yhtäpitäviä

(1) Jokainen $x \in V$ on 1-käsitteisesti muotoa $x = \bigoplus_{\sigma \in \frac{G}{H}} x_\sigma$, missä $x\sigma \in W_\sigma$.
(2) $V = \bigoplus_{r \in R} W_r$. Erityisesti $\dim V = \sum_{r \in R} \dim W_r = (G : H) \dim W$.