

Isaac Newtonin tehtäviä.

1. Pisteet G, H, V ja U (tässä järjestyksessä) muodostavat maastoon nelikulmion. Maanmittarilla on tiedossa pisteiden G ja H etäisyys ℓ . Hän käy tähtäilemässä pisteissä U ja V ja mittaa kulmat $\angle GUH = \alpha$, $\angle HUV = \beta$, $\angle UVG = \gamma$ ja $\angle GVH = \delta$. Lausu U :n ja V :n etäisyys x näiden avulla. Tällä kurssilla luennoitun geometrian täydennykseksi voit hakea apukaavoja vaikka MAOLin kaavakokoelmasta. Newton antaa neuvon: valitse ”Data and Quaesita by which you think it is most easy for you to make out your Equation.”
2. Tiedät gravitaatiokiihtyvyyden ja äänen nopeuden. Mitataan aika siitä, kun kivi on pudotettu kaivoon, siihen, kun loiskahdus kuuluu. Kuinka syvällä vedenpinta on?
3. Tehtävänä on ennustaa taivaalla näkyvän pyrstötähden liike kolmesta havinnosta. Avaruudessa pyrstötähti liikkuu suoraviivaisesti tasaisella nopeudella. (Miksi? Miksi ei?)

Täsmennys: Olkoon O havaitsijan silmä ja A, B ja C komeetan paikat ensimmäisellä, toisella ja kolmannella havaintohetkellä. Mitata voidaan kulmat $\angle AOB = \omega$ ja $\angle AOC = \omega'$ sekä ensimmäisen ja toisen havainnon välinen aika t ja ensimmäisen ja kolmannen havainnon välinen aika t' . Tasaisen nopeuden oletus merkitsee, että $AB : AC = t : t'$. Tehtävänä on laskea $\angle ABO = \beta$. (Laske mitta-arvoista lähtemällä sopiva trigonometrinen funktio esim. $\tan \beta$.)

Yhtälöiden määrä / Descartes.

4. Määrää sellaiset luvut p, q ja r , että yhtälö

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$$

pätee kaikilla muuttujan x arvoilla.

(Tässä tehtävässä on ratkaistav äärettömän monta yhtälöä. Toisaalta tvaaditaan annetun neljännen asteen polynomin ”tarkan neliöjuuren” löytämistä. Tällä kertaa se saatta onnistuakin, mutta yleensä ei. Ei tietenkäänkö?)

5. (Euler) Mies ostaa 100:lla kruunulla yhteensä 100 kpl. possuja, vuohia ja lampaita. Possut maksavat $3\frac{1}{2}$ kruunua per saparo, vuohen hinta on $1\frac{1}{3}$ kruunua ja lampaan $\frac{1}{2}$ kruunua. Kuinka paljon mitäkin lajia?

Euler ratkaisee tehtävänsä ”sokean miehen säännöllä” (*Regula Caeci*), eli seuraavasti: Olkoot x, y ja $z \in \mathbb{N}$ (!) etsityt luvut.

$$x + y + z = 100$$

$$21x + 8y + 3z = 600$$

Eliminoimalla z saadaan ratkaistua $y = 60 - \frac{18x}{5}$, josta päätellään, että $\frac{x}{5} \in \mathbb{N}$. Jatka!

KÄÄNNÄ

Miksi tällaisia tehtäviä.

6. Polya kirjoittaa ”Discovery”-kirjassaan:

Toivottavasti järkytän eräitä ihmisiä väittäessäni, että peruskoulun yläasteen ja vielä lukionkin matematiikan tärkein yksittäinen asia on opettaa muodostamaan yhtälöitä ja ratkaisemaan sanallisia tehtäviä. Sitäpaitsi minulla on hyvät perusteet väittää näin.

Ratkaistessaan sanallisia tehtäviä tekemällä niistä yhtälöitä oppilas *kääntää* todellisen tilanteen matematiikan kielelle: hänellä on tilaisuus kokea, että todellisiin asioihin saattaa hyvinkin liittyä matemaattisia käsitteitä, mutta että näitä yhteyksiä täytyy käsitellä huolellisesti. Nämä harjoitukset antavat ensimmäisen tilaisuuden hankkia tämän peruskokemuksen. Monelle oppilaalle tilaisuus voi myös olla viimeinen, ellei hän sitten satu myöhemmin tarvitsemaan matematiikkaa ammatissaan. Mutta insinöörit ja tiedemiehet käyttävät matematiikkaa työssään nimenomaan kuvataksaan todellisia tilanteita matemaattisin käsittein. Insinöörihän kyllä ansaitsee paremmin kuin matemaatikko ja hänellä on varaa palkata matemaatikko ratkaisemaan matemaattiset ongelmansa; siksi tulevan insinöörin ei tarvitsekaan opiskella matematiikkaa osatakseen **ratkaista** ongelmia. Mutta on tehtävä, jonka tekemistä insinööri ei voi kokonaan lykätä matemaatikolle: insinöörin on osattava tarpeeksi matematiikkaa voidakseen asettaa ongelmansa matemaattisessa muodossa. Tulevalla insinöörillä on koululaisena yhtälöitä muodostaessaan ja sanallisia tehtäviä ratkoessaan ensimmäinen ja mainio tilaisuus omaksua juuri ne matemaattiset asenteet ja taidot joita hän myöhemmin tarvitsee.

Keksi itse tähän kohtaan sopiva ongelma ja ratkaise se.

*** Jos kiinnostuit mutta et muistanut: $a = \text{noin } 10\text{m/s}^2, v = \text{noin } 300\text{m/s}$.