Matemaattinen ongelmanratkaisu 2005 Harjoitus 4

Rekursio ja induktio.

1. *Fibonaccin luvut* ovat 1,1,2,3,5,8 jne siten, että kukin on edellisen kahden summa. Numeroidaan ne siten, että $F_1 = F_2 = 1$ jne. Todista induktiolla (!) oikeaksi luennolla (aivan eri tavalla) johtamamme *Binet'n kaava*:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$$

(Osoita, että jos kaava pätee kahdelle peräkkäiselle F:lle, se pätee niiden summallekin. Mitä muuta pitää tarkastaa?)

2. *Pascalin kolmio* on kaikille tuttu.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots\cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

Kolmiota tutkiessa voi olla iloa Pascalin alkuperäistä jäljittelvästä taulukosta

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								

TRIANGLE ARITHMETIQUE.

Varsinaisessa tehtävässä piirrämme kuitenkin kolmion toiseen muotoon, ns. "kiinalaiseksi kolmioksi"

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\ldots & \ldots & & & & &
\end{array}$$

ja väitämme, että nousevien vinorivien summat, siis 1+1, 1+2 ,1+3+1, 1+4+3,1+5+6+1 jne ... ovat Fibonaccin lukuja. Ovatko?

KÄÄNNÄ!

3. Leibnitzin *harmoninen kolmio*

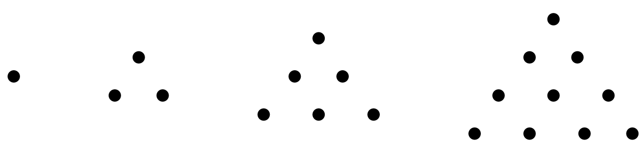
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{16} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} \\
 & & & & & \cdots\cdots\cdots & & & & &
\end{array}
$$

ja Pascalin kolmio

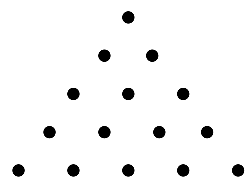
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots\cdots\cdots & & & & &
\end{array}
$$

liittyvät toisiinsa. Huomaa aluksi, miten Leibnitzin kolmio on muodostettu ja keksi sitten, miten Leibnitzin kolmion luvut saadaan Pascalin kolmion luvuista?

4. Huygens esitti Pascalille vaikeana ongelmana kolmiolukujen käänteislukujen summan laskemista, siis sarjan $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\ldots$ summan määräämistä. Näytä, kuinka helppo se on laskea harmonisen kolmion avulla. Kolmioluvut $\Delta_n = n(n+1)$ ovat muuten saaneet nimensä siitä, että ne saadaan kuvioista



ja



jne.

Vielä Descartesin hengessä.

5. Eulerin perintötehtävä: Eräältä isältä jäi kuollessaan muutama lapsi, jotka jakoivat perinnön seuraavalla tavalla:

Ensimmäinen otti sata kruunua ja vielä kymmenennen osan siitä, mitä oli jäljellä.

Toinen otti kaksisataa kruunua ja vielä kymmenennen osan siitä, mitä oli jäljellä.

Kolmas otti kolmesataa kruunua ja vielä kymmenennen osan siitä, mitä oli jäljellä.

Neljäs otti neljäsataa kruunua ja vielä kymmenennen osan siitä, mitä oli jäljellä.

Näin jatkettiin, kunnes huomattiin, että omaisuus oli jaettu kauniisti tasan.

Kuinka monta oli lapsia ja kuinka suuri oli perintö? Miksi luulet Leonhard Eulerin tällaisia kyselleen?

6. Newtonin karja: Jos 12 härkää syö kaljuksi $3\frac{1}{2}$ eekkeriä laidunta 4 viikossa ja 21 härkää syö 10 eekkeriä samanlaista laidunta 9 viikossa, niin selvitä, kuinka monta härkää tarvitaan syömään 24 eekkerin laidun 18 viikossa.