Harjoitukset 3 **Lukuteoria**
tiistai 4.10.2011 16.00-17.30 MaD-302 **HUOMAA AIKA**

1. *Keksi perusteluja kohtaan 1.55, jonka mukaan*

$$a) \quad \zeta(2) = \pi^2/6$$

tai koeta ainakin todistaa, että

$$b) \quad \zeta(2) = 0.607...$$

2. *Möbiuksen inversiokaavan mukaan lukuteoreettisille funktioille f ja g ovat seuraavat relaatiot ekvivalentit:*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N},$$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(n/d) \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Möbiuksen inversiokaavaa sanotaan toisinaan Möbiuksen ensimmäiseksi inversiokaavaksi, *kun taas* Möbiuksen toinen inversiokaava *tarkoittaa sitä, että yhtälöt*

$$f(x) = \sum_{n \le x} g\left(\frac{x}{n}\right) \quad (x \ge 1),$$
$$g(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right)$$

ovat ekvivalentit.

(Tulkinta: $n \in \mathbb{N}$, funktiot f ja g määritellyt vähintään ao. pisteissä, esimerkiksi kaikille reaaliluvuille. Kiinteällä $x \in \mathbb{R}$ on $n \mapsto f(\frac{x}{n})$ lukuteoreettinen funktio. Huomaa myös, että $n \in \mathbb{N}$ eli $\sum_{n \le x}$ tarkoittaaa samaa kuin $\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor}$, missä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on enintään luvun x suuruinen eli luvun x kokonaisosaa.*)*

Todista Möbiuksen toinen inversiokaava. Vihje: $\mu * E = E_0$

3. *Todista (edellisen avulla)*

$$\sum_{n \le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on enintään luvun x suuruinen eli luvun x kokonaisosaa.

(Jutilan monisteessa mainitaan, että yhtälö

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

on ekvivalentti "alkulukulauseen"kanssa. Ks alla. En tältä istumalta tiedä, mitä versiota alkulukulauseesta Jutila mahtaa tarkoittaa?)

4. Seulaperiaate. *Olkoon* $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ *äärellinen joukko ja* $P \in \mathbb{Z}$, $P \neq 0$. *Kysytään, mikä on niiden lukujen* $a \in \mathcal{A}$ *lukumäärä* N, *joille* $(a, P) = 1$. *Olkoon* A_d *niiden lukujen* $a \in \mathcal{A}$ *lukumäärä, joille* $d|a$. *Silloin* seulaperiaatteen *nimellä tunnettu yhtälö lausuu, että*

$$N = \sum_{d|P} \mu(d) A_d. \tag{1}$$

Todista seulaperiaate!
Vihje: Todistus on hyvin yksinkertainen: määritelmän mukaan

$$N = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ (a,P)=1}} 1 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{d|(a,P)} \mu(d) = \cdots = \sum_{d|P} \mu(d) A_d.$$

5. *Määritelmä:* von Mangoldtin funktio *on*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \textit{jos } n = p^m, \\ 0 & \textit{muulloin}; \end{cases}$$

tässä p^m *käy läpi (aidot) alkulukupotenssit, ts.* $p \in \mathbb{P}$ *ja* $m \geq 1$.

Todista, että $\log n = (\Lambda * E)(n)$.

6. *von Mangoldtin funktio näyttelee tärkeää osaa alkulukuteoriassa, sillä alkulukulause on ekvivalentti asymptoottisen relaation*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = 1$$

kanssa. Möbiuksen ja von Mangoldtin funktiot kytkeytyvät toisiinsa kaavan

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

välityksellä. Todista tämä yhteys lähtemällä edellisessä tehtävässä todistetusta esityksestä $\log n = (\Lambda * E)(n)$.

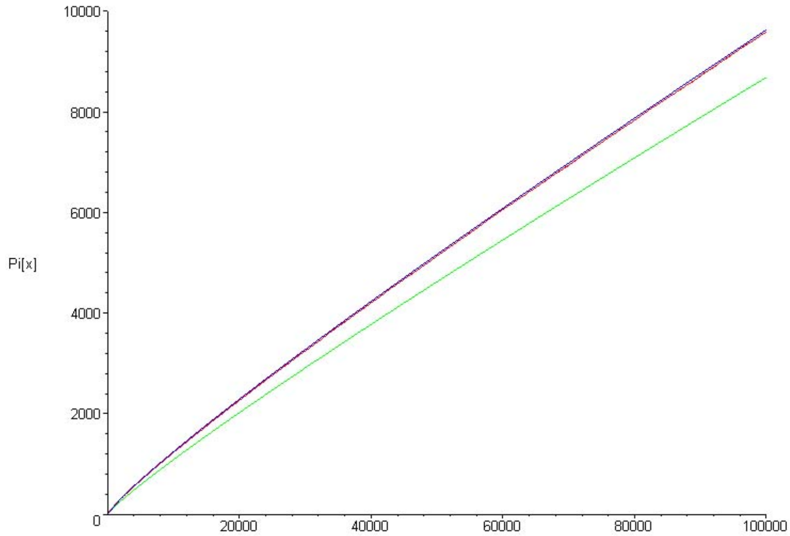
7. *(En ole itse kokeillut)*

Näytä yhtälön $641 = 2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$ *avulla, että* $2^{32} = 641k - 1$ *jollain* $k \in \mathbb{N}$. *(Tästä seuraa, että* $F_5 = 2^{2^5} + 1$ *on jaollinen* 641*:llä.)*

8. *Lue:*

Alkulukulause (Wikipedia)

Lukuteoriassa alkulukulause antaa alkulukujen jakauman asympoottisen arvion. Karkeasti ottaen alkulukulauseen mukaan satunnaisesti valittu positiivinen kokonaisluku N *on todennäköisyydellä* $1/\log N$ *alkuluku, missä* $\log N$ *on* N*:n luonnollinen logaritmi.* N*:n kasvaessa alkuluvut käyvät yhä harvemmiksi. Esimerkiksi kun* $N = 10000$*, keskimäärin joka yhdeksäs luku on alkuluku, kun taas arvolla* $N = 1000000000$ *suunnilleen joka* 21*. luku on alkuluku. Alkulukulause antaa arvion tälle harvenemisnopeudelle.*



KUVA 1. Funktioiden $\pi(x),{}^{x}\frac{x}{\log x}$ ja $Li(x)$ kuvaajat.

LAUSE. **(Alkulukulause)** *Olkoon* $\pi(x)$ *lukua* $x+1$ *pienempien alkulukujen lukumäärä. Tällöin alkulukulauseen mukaan osamäärän* $\pi(x)\log(x)/x$ *raja-arvo on 1, kun* x *kasvaa rajatta. (Tämä ei tarkoita sitä, että näiden funktioiden erotus lähenee nollaa.)*

Lauseen otaksui Adrien-Marie Legendre *vuonna 1796, ja sen todistivat* Jacques Hadamard *ja* Charles-Jean de la Vallée-Poussin *toisistaan riippumatta vuonna 1896. Molempien todistus perustuu funktioteoriaan. Tarkemmin sanottuna he osoittivat (lemman), että Riemannin zeeta-funktiolla* $\zeta(s)$ *ei ole nollakohtia* $s = x + iy$, *joilla* $x = Re(s) = 1$.

$\pi(x)$ logaritmisten integraalien avulla

Carl Friedrich Gauss *otaksui alkulukulausetta tarkemman asymptoottisen arvion. Määritellään* logaritminen integraali $Li(x)$ *asettamalla*

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(\log x)^k} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{x}{(\log x)^3} + \dots.$$

Alkulukulause voidaan kirjoittaa myös muodossa $\pi(x)$ $Li(x)$. *Tämän etuna on se, että arvion virhetermiä voidaan pienentää. Hadamard ja de la Vallée Poussin todistivat, että*

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \le Cxe^{-a\sqrt{\log x}}$$

jollain positiivisella vakiolla a. *Arviota myöhemmin yhä parannettu. Paras arvio riippu* ”Riemannin hypoteesista”. *Jos se pätee, niin* $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \le C \cdot \sqrt{x} \cdot \log x$

Logaritminen integraali $\mathrm{Li}(x)$ *on suurempi kuin* $\pi(x)$ *kaikilla riittävän pienillä luvuilla* x. *Vuonna 1914* J. E. Littlewood *todisti, että lausekkeiden suuruusjärjestys vaihtuu riittävän suurella luvulla. Ensimmäisen kerran tämä tapahtuu, kun* x *on suuruusluokkaa* 10^{316}.

Parempi selostus on englanninkielisellä sivulla, joka löytyy googlaamalla ”prime number theorem”.