Lien ryhmät **16.4.2012 / Ratkaisu: 6+3=9**
D 381 klo. 16-18.

1. *Klassisen moniston M tangenttikimppu TM voidaan varustaa sileän moniston rakenteella siten, että karttaympäristöjä ovat joukot $\bigcup_{p\in U} T_pM$, missä U on moniston M karttaympäristö, karttalehdet ovat joukkoja $\varphi(U)\times\mathbb{R}^d$ ja lokaalit parametrisoinnit ovat kuvaukset*

$$\varphi(U)\times\mathbb{R}^d \to \bigcup_{p\in U} T_pM : (x,X)\mapsto(\varphi^{-1}(x), D_x\varphi^{-1}X).$$

Miten tangenttikimpun topologia määräytyy? (Anna topologian kanta tai kuvaile avoimet joukot tai ympäristöt tms.)

Ratkaisu: Topologia määräytyy siitä, että karttakuvauksien kuuluu olla homeomorfismeja. Pisteen $(x,X)\in\varphi(U)\times\mathbb{R}^d$ kantaympäristöjä ovat tulotopologiassa joukot $A\times B$, missä A on avaruudessa $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^d\subset\mathbb{R}^n$ ja B avaruudessa $\mathbb{R}^d$ avoin — riittää valita A:ksi ja B:ksi topologian kantajoukko. Koska $U\subset\mathbb{R}^d$ on tavallisessa topologiassa avoin joukko, voidaan A ja B valita esim. euklidisiksi palloiksi, siis $A=\{y\in\mathbb{R}^d \mid \|x-y\|<\epsilon\}$ ja $B=\{Z\in\mathbb{R}^d \mid \|Z-X\|<\epsilon\}$, jolloin pisteen $(\varphi^{-1}(x), D_x\varphi^{-1}X)$ kantaympäristöksi tulee

$$\{(p,Y)\in TM \mid \|\varphi(p)-x\|<\epsilon \text{ ja } \|D_p\varphi(Y)-X\|<\epsilon\}.$$

2. *(Jatkoa) a) Onko tavallisen pallon $\mathbb{S}_2$ tangenttikimppu topologisena avaruutena sama kuin tuloavaruus $\mathbb{S}_2\times\mathbb{R}^2$?*

b) Onko tavallisen pallon $\mathbb{S}_2$ tangenttikimppu topologisena avaruutena sama kuin tuloavaruus $\mathbb{S}_2\times\mathbb{R}^2$?

c) Onko Möbiuksen nauhan M tangenttikimppu topologisena avaruutena sama kuin tuloavaruus $M\times\mathbb{R}^2$?

Ratkaisu: a) Kyllä on — yleistetty sylinterihän se. Homeomorfismiksi käy esimerkiksi kuvaus

$$T(S_2)\to S_1\times\mathbb{R} : (p,X)\mapsto(p,X),$$

joka on selvästikin homeomorfinen tehtävän 1 kuvailemassa topologiassa.

b) Ei ole. Epätriviaalia: Karvaisen pallon lause....

c) ??????

3. *Osoita, että ainoa jatkuva ryhmähomomorfismi ρ kääntyvien 2×2-matriisien ryhmältä $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ positiivilukujen multiplikatiiviselle ryhmälle $\mathbb{R}^*_+$, jolla lisäksi*

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \overset{\rho}{\mapsto} a,$$

on kuvaus $A\mapsto|\det A|$.

Ratkaisu: Gauss-Jordan-menetelmän yhteydessä on lineaarialgebrassa todistettu, että jokainen kääntyvä matriisi saadaan yksikkömatriisista kolmella perustoimituksella, joita ovat rivin kertominen luvulla, rivinvaihto ja rivin lisääminen toiseen. Nämä kaikki voidaan toteuttaa kertomalla sopivalla ”alkeismatriisilla”:

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha a & \alpha b\\ c & d\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{bmatrix}$$

Koska determinantin itseisarvo on multiplikatiivinen funktio, riittää todistaa väite alkeismatriiseille. Oletuksen mukaan se pätee kertolaskun tuottaville. Koska rivinkertomismatriisi kertoo sarakkeen, kun kerrotaan oikealta, niin sarakkeen kertominen luvulla säilyttää matriisin ominaisuuden $\rho(A) = \det A$.

Koska rivinvaihtomatriisi kerrottuna itsellään tietenkin on identtinen, se kuvautuu 1:n neliöjuureksi, positiivisuusoletuksen nojalla siis ykköseksi, joka onkin sen determinantin itseisarvo. OK!

Yhdistelmänä kahdesta edellisestä saadaan, että lause pätee diagonaalimatriiseille ja niistä rivin- tai sarakkeenvaihdolla saataville matriiseille $\begin{bmatrix}0 & b\\ c & 0\end{bmatrix}$. Koska jokainen symmetrinen matriisi diagonalisoituun eikä konjugointi muuta determinantin eikä hommorfismin ρ arvoa, lause pätee kaikille symmetrisille matriiseille, mutta rivinlisäysmatriisi ei ole symmetrinen, joten on keksittävä muuta. Koetetaan rakentaa se konjugoimalla jotain jo osattua epäsymmetristä matriisia, esimerkiksi matriisia $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Kokeiltuani yleisellä matriisilla $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ konjugointia huomasin, että yritteeksi riittää konjugointi matriisilla $C = \begin{bmatrix}1 & b\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Koska ρ on homomorfismi, niin edellisen mukaan $\rho(C\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}C^{-1}) = 2$. Lasketaan kojugaatti suoraan:

$$\begin{aligned} C\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}C^{-1} &= \begin{bmatrix}1 & b\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -b\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{b} \\ &= \begin{bmatrix}-2 & -b^2+2\\ -2 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{b} \end{aligned}.$$

Valitsemalla $b = \sqrt{2}$ saadaan, että

$$\rho(\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2,$$

joten

$$\rho(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} = -1,$$

mistä väite seuraa.

4. *(Jatko)*

a) Osoita, että ainoat jatkuvat ryhmähomomorfismit ρ kääntyvien 2×2-matriisien ryhmältä $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ *positiivilukujen multiplikatiiviselle ryhmälle* $\mathbb{R}^*_+$ *ovat kuvaukset* $A \mapsto |\det A|^\alpha$, *missä* $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Entä ryhmähomomorfismit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$? *(tai* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$?*)*

Ratkaisu: a) Tietenkin kuvatunlaiset funktiot ovat ryhmähomomorfismeja.Toisaalta, jos $\rho : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$ on ryhmähomomorfismi, niin tarkastellaan jonkin ykkösmatriisista eroavan alkion kuvaa, mukava on esimerkiksi

$$\rho(\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = a = e^{\log a} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nyt kuvaus $A \mapsto \rho(A)^{1/\log a}$ toteuttaa edellisen tehtävän ehdon yhdelle luvulle a. Koska diagonaalimatriisi kerrotaan termeittäin, seuraa tästä ja jatkuvuudesta (VASTA NYT TARPEEN), että se pätee kaikille a mistä väite seuraa edellisen tehtävän perusteella.

b) Positiivinen tapaus yleistyy suoraan. Jos positivisuudesta luovutaan, joutuu miettimään merkkiä. Tulokseksi tulee, että otetaan determinantin merkki (potenssin korottamisen ajaksi on merkistä luovuttava, koska vain positiivliluvuilla on yksikäsitteinen reaalinen potenssi.)

5. *................*

Ratkaisu: tehtävä oli väärin asetettu. Oikea tehtävä ensi kerralla.

6. *Ryhmän* $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *eli* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*alkiot ovat kääntyvät* $n \times n$*-matriisit. Matriisitulo vasemmalta* $gA = L_g(A) : G \to G$ *on lineaarikuvaus (sellaisen rajoittuma), joten se on itsensä derivaatta ja sen Jacobin determinentti on siis sen determinantti. Koska matriisitulo vasemmalta* $gA = L_g(A)$ *lasketaan kertomalla* A *sarakkeittain, se voidaan kirjoittaa:* $gA = [gx^1, \ldots, gx^n]$*, missä vektorit* $x^1, \ldots, x^n$ *ovat matriisin* A *sarakkeet.*

Osoita, että

$$JL_g = \det L_g = (\det g)^n.$$

Ratkaisu: Suora lasku tämäkin.

7. *Osoita, että vastaavalla tavalla saadaan oikenpuoleisen kertolaskun Jacobin deteminantti siitä huomiosta, että oikealta kertominen kertoo matriisin riveittäin. Siksi myös*

$$JR_g = \det R_g = (\det g)^n.$$

Ratkaisu: Sama juttu.

8. *Olkoon* μ *Lien ryhmän* G *normalisoitu vasen Haarin mitta ja* $g \in G$*. Osoita, että myös* $\mu_g(A) = \mu(gAg^{-1})$ *on vasen Haarin mitta. (Onko sekin normalisoitu?)*

Ratkaisu: Suora lasku tämäkin.

9. *Osoita, että moduli* Δ *on ryhmähomomorfismi* $G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Ratkaisu: Helppo.

10. Määritelmä: *Lien ryhmän (yleisemmin: topologisen ryhmän)* G *osajoukossa* $E \subset G$ *määritelty reaaliarvoinen (tai kompleksiarvoinen tms.) funktio* $f : E \to \mathbb{R}$ *on* vasemmalta tasaisesti jatkuva*, jos kaikille* $\epsilon > 0$ *on olemassa neutraalialkion* $e \in G$ *ympäristö* $V \subset G$ *siten, että* $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$ *kaikilla* $x \in E$ *ja* $y \in E \cap Vx$*. Vastaavasti määritellään* oikealta tasaisesti jatkuva *funktio.*

Osoita, että kompaktissa osajoukossa $E \subset G$ *jokainen jatkuva funktio on vasemmalta ja oikealta tasaisesti jatkuva.*

Ratkaisu: Kuten analyysin kursseilla. MOTIIVINA SEURAAVA:

11. *(Jäänee ensi viikkoon:)*
Osoita, että moduli Δ *on jatkuva kuvaus* $G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.
Vihje: Tarkastele sellaista jatkuvaa kompaktikantajaista funktiota $f : G \to \mathbb{R}$, *jolla*

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = 1.$$

Osoita, että

$$\Delta(g) = \int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x).$$

ja käytä edellisen tehtävän tulosta.
Ratkaisu: